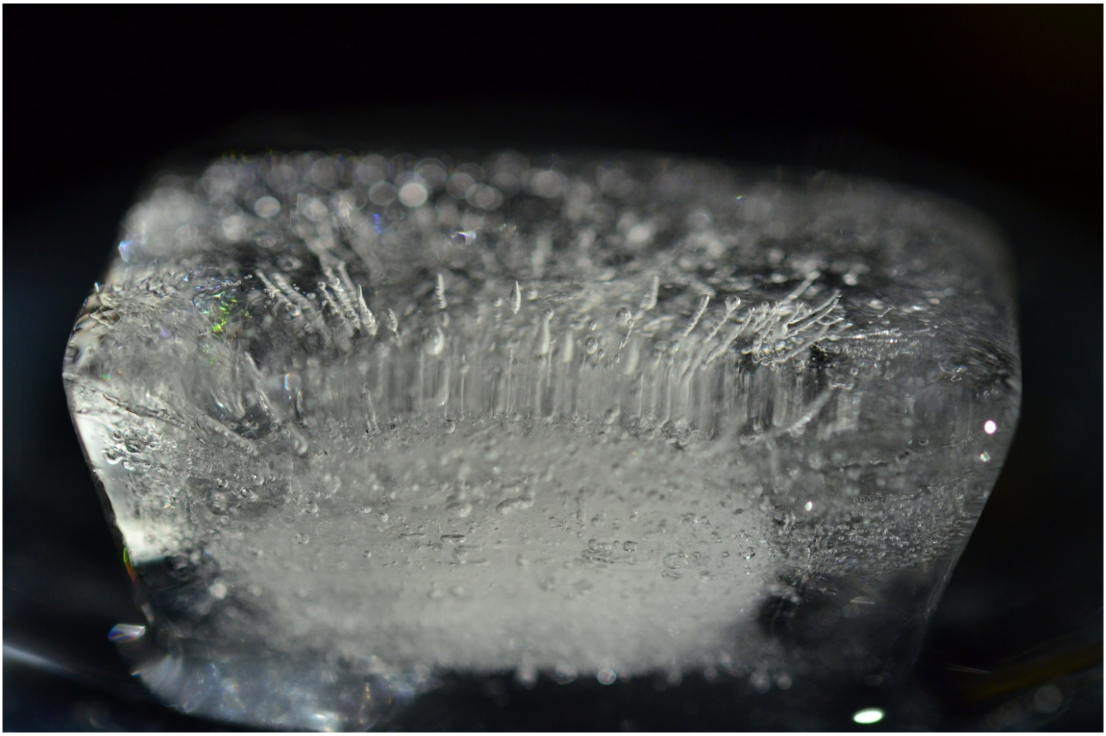
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2018
Letnik 65
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 65 • ŠT. 4 • STR 121-160 • JULIJ 2018

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2018, letnik 65, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,99 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

VERJETNOST KOMUTIRANJA

URBAN JEZERNIK

Universidad del País Vasco

Math. Subj. Class. (2010): 20P05, 20D60, 20F65

Verjetnost komutiranja je verjetnost, da v dani končni množici, opremljeni z binarno operacijo, dva naključno izbrana elementa komutirata. V članku raziščemo vpliv algebraične strukture na njeno verjetnost komutiranja, pri čemer se osredotočimo predvsem na končne grupe. Razkrijemo nekaj lastnosti množice zavzetih verjetnosti komutiranja končnih grup. Predstavimo tudi sodobnejše posplošitve pojma verjetnosti komutiranja na neskončne grupe.

COMMUTING PROBABILITY

Commuting probability is the probability that in a given finite set equipped with a binary operation, two randomly chosen elements commute. In this paper, we explore the influence of the algebraic structure of this set on its commuting probability, focusing especially on finite groups. Some properties of the set of all commuting probability values of finite groups are revealed. We also present modern generalizations of the concept of commuting probability to infinite groups.

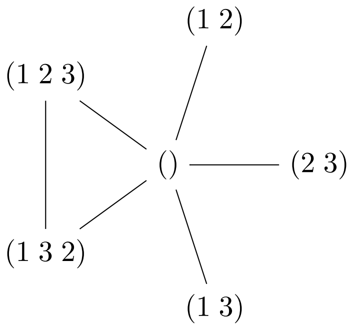
O verjetnosti komutiranja

Opazujmo končno množico X, opremljeno z binarno operacijo. Verjetnost komutiranja $\mathrm{vk}(X)$ je verjetnost, da dva naključno in neodvisno izbrana elementa množice X komutirata glede na dano operacijo. Vrednost $\mathrm{vk}(X)$ izračunamo tako, da med vsemi urejenimi pari elementov v X izračunamo delež tistih, ki komutirajo.

Verjetnost komutiranja sta sistematično prvič raziskovala Erdös in Turán med razvijanjem lastne verjetnostne metode [3]. V pričujočem članku si ta koncept ogledamo iz različnih zornih kotov, pri čemer za vodilo vzamemo interakcijo med algebraično strukturo dane množice X in njeno verjetnostjo komutiranja $\mathrm{vk}(X)$.

Vstopimo s primeri.

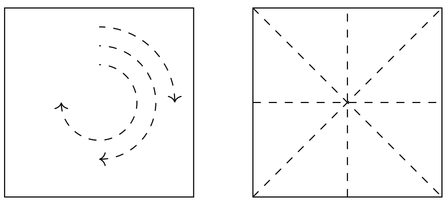
Primer 1. Za X vzemimo simetrično grupo S_3, najmanjšo nekomutativno grupo. Spomnimo se, da S_3 sestoji iz šestih permutacij na treh točkah, kot je prikazano na naslednji sliki. Dve različni permutaciji sta na sliki povezani s povezavo, če in samo če komutirata.



Verjetnost komutiranja grupe S_3 izračunamo tako, da med vsemi urejenimi pari elementov izračunamo delež tistih, ki komutirajo. Število vseh urejenih parov elementov v S_3 je $6^2 = 36$. Komutirajoče pare preštejmo tako, da za vsak element posebej premislimo, s katerimi elementi komutira. Enota komutira z vsemi elementi. Dvocikli v S_3 paroma ne komutirajo. Prav tako noben od dvociklov ne komutira z nobenim triciklom. Tricikla (1 2 3) in (1 3 2) komutirata. Hkrati ne pozabimo, da vsak element komutira sam s sabo. Tako je število vseh komutirajočih urejenih parov v S_3 enako $6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 18$ in zato je verjetnost, da je naključno izbrani urejeni par komutirajoč, enaka $\mathrm{vk}(S_3) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

V simetričnih grupah višjih redov S_n število urejenih parov elementov raste zelo hitro, komutirajoči pari pa so, razen disjunktnih ciklov, bolj izjemne sorte. Pričakujemo torej, da velja $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vk}(S_n) = 0$. Res je tako, utemeljitev podamo v posledici 7.

Primer 2. Za X vzemimo simetrije kvadrata, predstavljene kot diedrska grupa D_4. Spomnimo se, da D_4 sestoji iz štirih rotacij (okrog središča kvadrata za kote 0°, 90°, 180° in 270°) in štirih zrcaljenj (dve preko simetral stranic in dve preko diagonal).



Preštejmo komutirajoče pare. Enota grupe, tj. rotacija za 0°, komutira z vsemi elementi. Vsaka od netrivialnih rotacij komutira z vsako od drugih rotacij. Rotacija za kot 180° komutira tudi z vsemi zrcaljenji, nobena od drugih dveh netrivialnih rotacij pa ne komutira z nobenim zrcaljenjem. Zrcaljenji komutirata, če in samo če sta istovrstni. Ugotovili smo torej, da enota komutira z 8 elementi, rotacija za 180° prav tako z 8 elementi, rotaciji za 90° in 270° s 4 elementi, ter nazadnje vsako od štirih zrcaljenj s 4 elementi. Tako velja $\mathrm{vk}(D_4) = \frac{8+8+2\cdot4+4\cdot4}{64} = \frac{5}{8}$.

Kvadrat lahko zamenjamo s poljubnim pravilnim n-kotnikom. Grupa simetrij pravilnega n-kotnika je diedrska grupa D_n. Ta sestoji iz n rotacij in n zrcaljenj. Število urejenih parov elementov je $(2n)^2$, torej raste kvadratno z n. Vsaj takšno rast pa ima tudi število komutirajočih parov, saj vsaka od n rotacij komutira z vsako drugo. Velja torej $\mathrm{vk}(D_n) > \frac{n\cdot n}{(2n)^2} = \frac{1}{4}$ za vsak n. V posledici 12 premislimo, da velja $\lim_{n\to\infty}\mathrm{vk}(D_n) = \frac{1}{4}$.

Primer 3. Za X vzemimo direktni produkt množic $\{0,1\} \times \{1,2,\dots,n\}$. Na X definirajmo binarno operacijo $\star$ na naslednji način:

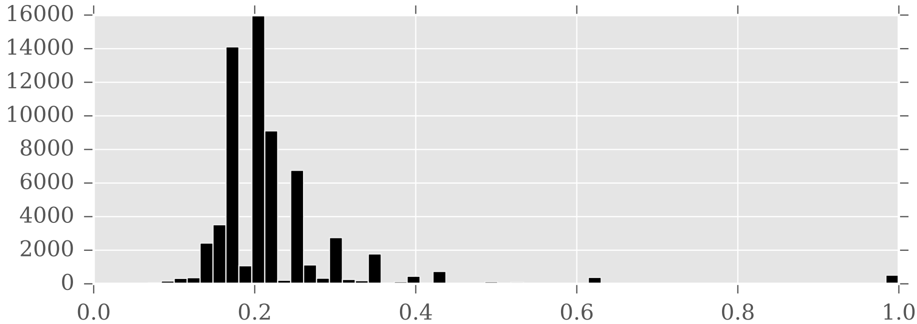
$$(i,j) \star (k,l) = \begin{cases} (i,j) & \text{če je } j \leq l; \\ (k,l) & \text{sicer.} \end{cases}$$

Operacija $\star$ torej vrne element, katerega druga komponenta je manjša, če pa sta drugi komponenti enaki, vrne prvi element. Hitro lahko preverimo, da je ta operacija asociativna, torej je $(X,\star)$ polgrupa. Vsaka dva elementa z različnima drugima komponentama komutirata, elementa z enako drugo komponento pa komutirata le, če sta enaka. Komutirajočih parov je veliko, zato verjetnost komutiranja v X lažje izrazimo kot nasprotni dogodek nekomutiranja. Tako velja $\mathrm{vk}(X) = 1 - \frac{2n}{(2n)^2} = 1 - \frac{1}{2n}$. Z naraščajočim n na ta način najdemo nekomutativne polgrupe z verjetnostjo komutiranja poljubno blizu 1.

Z modifikacijo tega primera sta Ponomarenko in Selinski pokazala, da je lahko verjetnost komutiranja končne polgrupe poljubno pozitivno racionalno število med 0 in 1.

Izrek 4 ([13] – Ponomarenko in Selinski 2012). *Za vsako racionalno število $r \in (0,1]$ obstaja končna polgrupa S, za katero velja* $\mathrm{vk}(S) = r$.

Nekoliko bolj pestro je z množicami, v katerih je več algebraične strukture. Slika 1 prikazuje histogram verjetnosti komutiranja, ki jih dobimo, če opazujemo le grupe moči največ 256. Število takšnih grup je 63 104, le 516 od teh je komutativnih. Najmanjša možna verjetnost komutiranja je tukaj $1/28 \approx 3{,}6\,\%$. Verjetnosti komutiranja so sicer skoncentrirane okoli $22\,\%$. Ne spreglejmo tudi presenetljivih praznin: na histogramu je videti cele intervale verjetnosti brez zavzetih vrednosti.



Slika 1. Histogram verjetnosti komutiranja grup moči kvečjemu 256.

Ko na množico X dodamo še več algebraične strukture, recimo z dodatno operacijo, s katero X postane kolobar, so rezultati glede verjetnosti komutiranja sorodni tistim za grupe [10], čeravno se jih v literaturi najde manj. V nadaljevanju se zato osredotočimo na verjetnosti komutiranja grup. V naslednjih razdelkih podamo nekaj osnovnih lastnosti verjetnosti komutiranja končnih grup, dokažemo obstoj verjetnostnih lukenj in dosedanja opažanja še izostrimo, nazadnje pa pokažemo, kako lahko pojem verjetnosti komutiranja posplošimo na neskončne grupe.

O strukturnem vplivu

Osredotočeni smo na končne grupe in na razumevanje vpliva grupne strukture na verjetnost komutiranja. Zabeležimo najprej povezavo med verjetnostjo komutiranja grupe in njenih podgrup ter kvocientov.

Trditev 5. *Naj bo G končna grupa in H njena podgrupa. Tedaj velja* $\mathrm{vk}(G) \leq \mathrm{vk}(H)$. *Če je H podgrupa edinka v G, velja* $\mathrm{vk}(G) \leq \mathrm{vk}(G/H)$.

Dokaz. Verjetnost komutiranja izrazimo eksplicitno kot delež komutirajočih parov med vsemi urejenimi pari v grupi G:

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{|\{(x, y) \in G \times G : xy = yx\}|}{|G|^2}.$$

Slednje zapišimo kot

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{\sum_{x\in G} |\{y \in G : xy = yx\}|}{|G|^2}$$

in prepoznajmo centralizator $C_G(x) = \{y \in G : xy = yx\} \leq G$. Da lahko primerjamo vrednost $\mathrm{vk}(G)$ z $\mathrm{vk}(H)$, bo torej dovolj primerjati velikost $C_G(x)$ z velikostjo $C_H(x) = \{y \in H : xy = yx\}$ za vsak izbran $x \in G$.

Očitno je $C_H(x)$ podgrupa grupe $C_G(x)$ in tako je $C_G(x)$ unija odsekov $\{aC_H(x) : a \in C_G(x)\}$. Vsakemu takemu odseku $aC_H(x)$ lahko na naraven način priredimo odsek grupe G po podgrupi H, in sicer aH. Hitro preverimo, da je to prirejanje dobro definirano in celo injektivno. Za $a, b \in C_G(x)$ namreč drži $aH = bH$ natanko tedaj, ko je $a^{-1}b \in H$, kar je ekvivalentno pogoju $a^{-1}b \in C_G(x) \cap H = C_H(x)$, slednje pa je enako kot $aC_H(x) = bC_H(x)$. Tako smo izpeljali neenakost $|C_G(x) : C_H(x)| \leq |G : H|$ med števili odsekov.

Izpeljano neenakost uporabimo v gornjem zapisu verjetnosti komutiranja:

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{\sum_{x\in G} |C_G(x)|}{|G|^2} \leq \frac{|G : H| \sum_{x\in G} |C_H(x)|}{|G|^2}.$$

V zadnji vsoti gremo po elementih grupe G in preštejemo število elementov v H, ki z vsakim od njih komutirajo. S tem torej preštejemo komutirajoče pare v $G \times H$. Te lahko preštejemo tudi tako, da gremo po elementih podgrupe H in preštejemo elemente v G, ki z njimi komutirajo. Tako dobimo

$$\mathrm{vk}(G) \leq \frac{|G : H| \sum_{x\in H} |C_G(x)|}{|G|^2}.$$

Še enkrat uporabimo neenakost med števili odsekov in zaključimo

$$\mathrm{vk}(G) \leq \frac{|G : H|^2 \sum_{x\in H} |C_H(x)|}{|G|^2} = \frac{\sum_{x\in H} |C_H(x)|}{|H|^2} = \mathrm{vk}(H).$$

Tako je dokazan prvi del trditve.

Za dokaz drugega dela najprej razpišemo

$$\mathrm{vk}(G/H) = \frac{|\{(xH, yH) \in G/H \times G/H : xyH = yxH\}|}{|G/H|^2}.$$

Ob elementih $x, y \in G$ je pogoj $xyH = yxH$ ekvivalenten pogoju $x^{-1}y^{-1}xy \in H$. Veljavnost tega pogoja je neodvisna od menjave elementa x ali y s kakšnim drugim predstavnikom istega odseka xH ali yH. Tako lahko izrazimo

$$\mathrm{vk}(G/H) = \frac{|\{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y^{-1}xy \in H\}|}{|G/H|^2 \cdot |H|^2}.$$

Parov $(x, y) \in G \times G$ z lastnostjo $x^{-1}y^{-1}xy \in H$ je vsaj toliko, kolikor je parov z lastnostjo $x^{-1}y^{-1}xy = 1$, se pravi $xy = yx$. S tem lahko omejimo verjetnost komutiranja v kvocientu,

$$\mathrm{vk}(G/H) \geq \frac{|\{(x, y) \in G \times G : xy = yx\}|}{|G|^2} = \mathrm{vk}(G),$$

s čimer je tudi dokaz drugega dela zaključen. ∎

Iz dveh grup G_1 in G_2 lahko napravimo novo grupo. To storimo najlažje kar tako, da ju zložimo v direktni produkt grup $G_1 \times G_2$. Spomnimo se, da je kot množica to običajen kartezični produkt množic G_1 in G_2, grupna operacija pa je definirana po komponentah, se pravi $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$ za $g_i \in G_1$, $h_i \in G_2$. Preverimo, da je verjetnost komutiranja v tem smislu multiplikativna.

Trditev 6. *Za končni grupi* G_1 *in* G_2 *velja* $\mathrm{vk}(G_1 \times G_2) = \mathrm{vk}(G_1) \cdot \mathrm{vk}(G_2)$.

Dokaz. Res, najprej zapišimo

$$\mathrm{vk}(G_1 \times G_2) = \frac{\sum_{x \in G_1 \times G_2} |C_{G_1 \times G_2}(x)|}{|G_1 \times G_2|^2} = \frac{\sum_{a \in G_1} \sum_{b \in G_2} |C_{G_1 \times G_2}((a, b))|}{|G_1 \times G_2|^2}.$$

Ker v kartezičnem produktu $G_1 \times G_2$ množimo po komponentah, lahko centralizator izrazimo kot $C_{G_1 \times G_2}((a, b)) = C_{G_1}(a) \times C_{G_2}(b) \leq G_1 \times G_2$. Sledi

$$\mathrm{vk}(G_1 \times G_2) = \frac{\sum_{a \in G_1} \sum_{b \in G_2} |C_{G_1}(a)||C_{G_2}(b)|}{|G_1|^2 |G_2|^2}.$$

Zadnjo vsoto prepoznamo kot produkt

$$\frac{\sum_{a \in G_1} |C_{G_1}(a)|}{|G_1|^2} \cdot \frac{\sum_{b \in G_2} |C_{G_2}(b)|}{|G_2|^2} = \mathrm{vk}(G_1) \cdot \mathrm{vk}(G_2)$$

in dokaz je zaključen. ∎

Z zabeleženima trditvama nam že uspe utemeljiti, da je v dovolj velikih simetričnih grupah komutirajočih parov zanemarljivo malo.

Posledica 7. *Velja* $\lim_{n \to \infty} \mathrm{vk}(S_n) = 0$.

Dokaz. Simetrična grupa nižje stopnje se naravno vloži v simetrično grupo višje stopnje, zato je po trditvi 5 zaporedje verjetnosti komutiranja simetričnih grup $(\mathrm{vk}(S_n))_{n=1}^{\infty}$ padajoče. Pokažimo, da konvergira proti 0. V ta namen za vsako naravno število k opazujmo grupo $G_k = S_3 \times \cdots \times S_3$, ki je produkt k kopij simetrične grupe S_3. Po trditvi 6 velja $\mathrm{vk}(G_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Po Cayleyjevem izreku lahko vsako končno grupo vložimo v dovolj veliko simetrično grupo. Torej za vsak k obstaja n, da velja $G_k \leq S_n$, in zato za vsak $m \geq n$ velja $\mathrm{vk}(S_m) \leq \mathrm{vk}(S_n) \leq \mathrm{vk}(G_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Tako je $\lim_{n\to\infty}\mathrm{vk}(S_n) = 0$. ■

Verjetnost komutiranja simetričnih grup $\mathrm{vk}(S_n)$ je mogoče izračunati eksplicitno in tako podati tudi asimptotično obnašanje tega zaporedja, ko gre n proti neskončno. Ta in splošnejši opis za vse končne grupe sta našla že Erdös in Turán, gre pa takole. Elementa x, y abstraktne grupe G sta konjugirana, če obstaja tak $g \in G$, da velja $x = g^{-1}yg$. Lahko je preveriti, da je relacija konjugiranosti ekvivalenčna relacija na množici G. Ekvivalenčni razred elementa x je enak $x^G = \left\{g^{-1}xg : g \in G\right\}$, imenujemo ga razred konjugiranosti. Grupa G tako razpade na disjunktno unijo razredov konjugiranosti. Število teh razredov označimo s $\mathrm{k}(G)$. Za elementa $g, h \in G$ velja $g^{-1}xg = h^{-1}xh$, če in samo če je $(gh^{-1})^{-1}x(gh^{-1}) = x$. Slednje je enako kot $gh^{-1} \in C_G(x)$, kar preberemo kot enakost desnih odsekov $C_G(x)g = C_G(x)h$. Na ta način se vzpostavi bijekcija $g^{-1}xg \mapsto C_G(x)g$ med elementi razreda x^G in odseki grupe G po podgrupi $C_G(x)$. V posebnem drži enakost $|G : C_G(x)| = |x^G|$. Na vsem povedanem temelji naslednji izrek, ki razkrije povezavo med verjetnostjo komutiranja in $\mathrm{k}(G)$.

Izrek 8 ([3] – Erdös in Turán 1968). *Naj bo G končna grupa. Tedaj je*

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{\mathrm{k}(G)}{|G|}.$$

Dokaz. Kot običajno razpišemo

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{\sum_{x\in G} |C_G(x)|}{|G|^2}.$$

Velikost centralizatorja s pomočjo enakosti $|G : C_G(x)| = |x^G|$ zamenjamo z velikostjo razreda konjugiranosti in dobimo

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{\sum_{x\in G} \frac{1}{|x^G|}}{|G|}.$$

Vsoto v števcu razdelimo po razredih konjugiranosti in iz vsakega izberimo predstavnika x_i za $1 \leq i \leq \mathrm{k}(G)$. Razredi konjugiranosti x_i^G so med sabo disjunktni in pokrijejo ves G, za vsak element $x \in x_i^G$ pa velja $x^G = x_i^G$. Sledi

$$\mathrm{vk}(G) = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{k}(G)} |x_i^G| \frac{1}{|x_i^G|}}{|G|} = \frac{\mathrm{k}(G)}{|G|}$$

in dokaz je zaključen. ∎

Število razredov konjugiranosti dane grupe lahko izračunamo hitreje kot število vseh komutirajočih parov. Premislimo, kakšni so razredi konjugiranosti v primeru simetrične grupe S_n. Naj bo σ izbrana permutacija. Če zanjo velja $\sigma(i) = j$, potem za konjugirano permutacijo $\alpha^{-1}\sigma\alpha$ ob poljubni $\alpha \in S_n$ velja

$$(\alpha^{-1}\sigma\alpha)(\alpha^{-1}(i)) = (\alpha^{-1}\sigma)(i) = \alpha^{-1}(j).$$

Konjugirani element $\alpha^{-1}\sigma\alpha$ torej preslika $\alpha^{-1}(i)$ v $\alpha^{-1}(j)$ in tako permutira na enak način kot σ, le da je treba vsako od števil $1 \leq i \leq n$ zamenjati z $\alpha^{-1}(i)$. Ko α preteče vse elemente grupe S_n, v razredu za konjugiranost σ^{S_n} najdemo ravno vse permutacije z enako ciklično strukturo kot σ. Število razredov konjugiranosti v S_n je zato enako številu vseh možnih razčlenitev naravnega števila n. Elementarna eksplicitna formula za to število ne obstaja, že dolgo pa je poznana njena dobra asimptotska ocena [7]. Z njo velja

$$\mathrm{vk}(S_n) \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4n\sqrt{3}\cdot n!},$$

zato je logaritem $\log(\mathrm{vk}(S_n))$ po Stirlingovi aproksimaciji proporcionalen $-n\log n$ za velike vrednosti n.

Število $\mathrm{k}(G)$ je povezano z mnogimi drugimi aspekti teorije grup, tudi bržkone naslavnejšim – teorijo upodobitev. Brez strahu se lahko s tem dejstvom okoristimo! Teorija upodobitev je del matematične folklore, potrebno znanje pa lahko osvežimo že z zapiski [11].

Opazovano grupo G s homomorfizmom $\rho\colon G \to GL(V)$ upodobimo na končnorazsežnem kompleksnem vektorskem prostoru V. Kadar je $\dim V = n$, grupo $\mathrm{GL}(V)$ enačimo z $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Kadar lahko vektorski prostor V zapišemo kot direktno vsoto $V = U \oplus W$, pri čemer grupa G preko preslikave ρ deluje na vsaki komponenti te vsote posebej, rečemo, da je upodobitev razcepna. V nasprotnem imamo opravka z nerazcepno upodobitvijo. Prav tako kot cepimo naravna števila na prafaktorje, lahko upodobitev ρ razcepimo na nerazcepne upodobitve. Število vseh različnih nerazcepnih upodobitev (do izomorfizma natančno) grupe G je ravno $\mathrm{k}(G)$ [11, posledica 1.2.5]. Vse najdemo v univerzalnem primeru upodobitve; to je regularna upodobitev, pri kateri elemente grupe G upodobimo kot leva množenja na grupni algebri $\mathbb{C}G$. Finejši pogled na slednjo upodobitev poda naslednji izrek, ki ga najdemo v [11, izrek 1.2.3].

Izrek 9 (Wedderburn). *Naj bo G končna grupa. Tedaj je njena regularna upodobitev izomorfna direktni vsoti*

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^{\mathrm{k}(G)} \underbrace{V_i \oplus \cdots \oplus V_i}_{\dim V_i},$$

kjer so $V_1, V_2, \ldots, V_{\mathrm{k}(G)}$ ravno vse različne nerazcepne upodobitve (do izomorfizma natančno) grupe G. V posebnem sta kompleksni dimenziji leve in desne strani enaki, zato velja

$$|G| = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}(G)} (\dim V_i)^2 . \tag{1}$$

Primer 10. Opazujmo kvaternionsko grupo $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Spomnimo se, da v njej množimo z zakoni $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ in $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$. Da grupo Q_8 upodobimo na enorazsežnem kompleksnem prostoru, je treba podati homomorfizem $\chi\colon Q_8 \to \mathbb{C}^\times$. Ta je natanko določen s sliko generatorjev i in j. Za vsakega od njiju smemo izbrati enega od dveh kompleksnih korenov števila -1. Enostavno je preveriti, da vsaka taka izbira porodi homomorfizem χ. Skupaj imamo torej štiri enorazsežne upodobitve grupe Q_8. Po Wedderburnovem izreku velja $8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \sum_i d_i^2$, kjer so d_i stopnje višjerazsežnih nerazcepnih upodobitev. Edina možnost je, da obstaja natanko ena taka upodobitev stopnje 2. Tako velja $\mathrm{k}(Q_8) = 5$ in zato $\mathrm{vk}(Q_8) = \frac{5}{8}$.

Na splošno je število enorazsežnih upodobitev dane grupe G ravno število odsekov po njeni izpeljani podgrupi $G' = \langle \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in G\} \rangle$. Dokaz tega dejstva najdemo v [11, izrek 2.8.4]. Wedderburnovo formulo (1) zato lahko zapišemo kot

$$|G| = |G : G'| + \sum_i d_i^2,$$

kjer so d_i stopnje višjerazsežnih nerazcepnih upodobitev grupe G. Od tod je mogoče izpeljati zgornjo mejo za verjetnost komutiranja poljubne grupe.

Trditev 11 ([14] – Rusin 1979). *Naj bo G končna grupa. Tedaj velja*

$$\mathrm{vk}(G) \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{|G'|}\right).$$

Dokaz. V Wedderburnovi formuli upoštevajmo $d_i \ge 2$, pa velja

$$|G| = |G : G'| + \sum_{i=|G:G'|+1}^{\mathrm{k}(G)} d_i^2 \ge |G : G'| + (\mathrm{k}(G) - \big|G : G'\big|) \cdot 4.$$

Neenakost delimo z $|G|$, izrazimo $\mathrm{vk}(G) = \mathrm{k}(G)/|G|$ in trditev sledi. ∎

O zavzetih vrednostih

Množico zavzetih verjetnosti komutiranja vseh končnih grup označimo z $\mathcal{V}$. S strukturnimi rezultati iz prejšnjega razdelka lahko dokažemo dve zanimivi lastnosti množice $\mathcal{V}$. Najprej se prepričajmo, da $\mathcal{V}$ ni diskretna podmnožica intervala $[0, 1]$.

Posledica 12. *Velja* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vk}(D_n) = \frac{1}{4}$.

Dokaz. Naj bosta ρ in τ rotacija in zrcaljenje v D_n. Velja $\rho^{-1}\tau^{-1}\rho\tau = \rho^{-2}$. Izpeljana podgrupa D_n' torej vsebuje kvadrate vseh rotacij. Teh je vsaj $\frac{n}{2}$ in tako gre $|D_n'|$ proti neskončno, ko gre n proti neskončno. Že iz uvodnega razdelka vemo, da je $\mathrm{vk}(D_n) > \frac{1}{4}$, zato iz trditve 11 sledi $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vk}(D_n) = \frac{1}{4}$. ∎

Vrednost $\frac{1}{4}$ je torej limitna točka množice $\mathcal{V}$. Hkrati je po trditvi 6 verjetnost komutiranja grupe $S_3 \times S_3$ ravno $\frac{1}{4}$, torej je limitna vrednost tudi zavzeta in množica $\mathcal{V}$ ni diskretna. Iz strukturnih ocen izpeljimo še drugo lastnost, in sicer obstoj intervalov nezavzetih vrednosti.

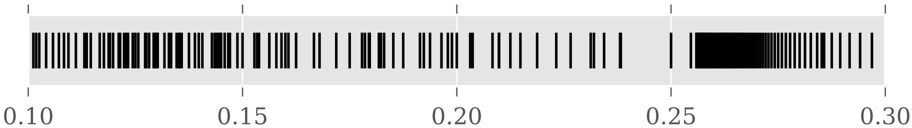
Posledica 13 ([6] – Gustafson 1973). *Interval* $(\frac{5}{8}, 1)$ *ne vsebuje verjetnosti komutiranja nobene končne grupe.*

Dokaz. Naj bo G končna grupa z $\mathrm{vk}(G) > \frac{5}{8}$. Iz predpostavke in trditve 11 sledi neenakost

$$\frac{5}{8} < \mathrm{vk}(G) \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{|G'|}\right),$$

ki se poenostavi do $|G'| < 2$. Sledi $G' = 1$, torej je G komutativna in zato $\mathrm{vk}(G) = 1$. ∎

Oglejmo si verjetnosti komutiranja grup moči največ 256 še enkrat, tokrat bolj podrobno. Omejimo se na verjetnosti z intervala $[0{,}1, 0{,}3]$. Slika 2 prikazuje zalogo vrednosti funkcije verjetnosti komutiranja, zožene na množico grup moči kvečjemu 256. Vemo že, da se verjetnosti komutiranja diedrskih grup z zgornje strani stekajo k vrednosti $\frac{1}{4}$, na sliki je razločen začetek te konvergence. Tik pod limitno točko $\frac{1}{4}$ je moč zaznati verjetnostno luknjo. Opazimo tudi, da je limitnih točk množice $\mathcal{V}$ najbrž več. Zanimivo bi jih bilo opisati.



Slika 2. Zavzete verjetnosti komutiranja grup moči kvečjemu 256.

O teh in splošnejših lastnostih množice zavzetih verjetnosti komutiranja je razmišljal že Joseph in postavil naslednje domneve.

Domneva 14 ([9] – Joseph 1977). Množica $\mathcal{V}$ ima naslednje lastnosti:

1. Limitne točke množice $\mathcal{V}$ so racionalne.
2. K limitnim točkam množice $\mathcal{V}$ se zavzete verjetnosti komutiranja lahko stekajo le z zgornje strani.
3. Množica $\mathcal{V} \cup \{0\}$ je zaprta.

Po prvi domnevi naj bi okoli vsakega iracionalnega števila na intervalu $[0, 1]$ našli okolico, ki ne seka množice $\mathcal{V}$. Tretja domneva pravi, da za vsako zaporedje $v_n \in \mathcal{V}$ s pozitivno limito $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ obstaja končna grupa z verjetnostjo komutiranja v. Nazadnje druga domneva trdi, da za vsako limitno točko v obstaja $\delta > 0$, da velja $(v - \delta, v) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Slednje pomeni, da je množica $\mathcal{V}$ dobro urejena glede na relacijo $>$.

Delno razrešitev Josephovih domnev najdemo v nedavno objavljenem članku [2]. Avtor prikaže presenetljivo in čudovito povezavo med verjetnostjo komutiranja in egipčansko kompleksnostjo racionalnih števil. Vsako racionalno število $q > 0$ lahko zapišemo kot vsoto $q = 1/n_1 + \cdots + 1/n_m$ za neka naravna števila n_i in m. To lahko storimo na več načinov, na primer $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Najmanjše število uporabljenih sumandov m, za katerega obstaja tak zapis, je (egipčanska) kompleksnost $\mathcal{E}(q)$ števila q. Eberhard dokaže, da so verjetnosti komutiranja končnih grup tesno povezane z ulomki omejene kompleksnosti.

Izrek 15 ([2] – Eberhard 2015). *Za vsako padajočo funkcijo* $\eta\colon \mathbb{N} \to (0,1)$ *obstaja konstanta* $M = M(\eta) \in \mathbb{N}$*, tako da je verjetnost komutiranja poljubne končne grupe oblike* $q + \epsilon$*, kjer je* $\mathcal{E}(q) \leq M$ *in* $0 \leq \epsilon \leq \eta(\mathcal{E}(q))$*.*

Od tod lahko hitro izpeljemo veljavnost prvih dveh zgornjih domnev.

Dokaz prvih dveh Josephovih domnev. Naj bo $v > 0$ limitna točka množice $\mathcal{V}$. Številu v se približajmo kar se da dobro z ulomki omejene kompleksnosti; naj bo

$$Q(m) = \sup\{q < v : \mathcal{E}(q) \leq m\}$$

za vsako naravno število m. Definirajmo funkcijo $\eta\colon \mathbb{N} \to (0,1)$ s predpisom $\eta(m) = (v - Q(m))/2$. Po izreku obstaja konstanta M, da vsako vrednost $p \in \mathcal{V}$ lahko zapišemo kot $p = q + \epsilon$, kjer je $\mathcal{E}(q) \leq M$ in $0 \leq \epsilon \leq \eta(\mathcal{E}(q))$. Če slučajno drži še neenakost $q < v$, sledi $q \leq Q(\mathcal{E}(q))$ in zato velja najprej neenakost

$$\epsilon \leq \eta(\mathcal{E}(q)) = \frac{v - Q(\mathcal{E}(q))}{2} \leq \frac{v-q}{2},$$

s tem pa še

$$p = q + \epsilon \leq \frac{v+q}{2} \leq \frac{v + Q(M)}{2} = v - \eta(M).$$

V tem primeru je torej število p oddaljeno vsaj $\eta(M)$ od števila v.

Vzemimo zaporedje $v_n = q_n + \epsilon_n \in \mathcal{V}$ z limito v. Iz zgornjega premisleka sledi, da lahko le za končno mnogo indeksov velja $q_n < v$. S tem je dokazana druga domneva. Ker je zato $v_n \geq q_n \geq v$ za skoraj vse indekse, tudi zaporedje q_n konvergira k v. Množica vseh ulomkov kompleksnosti največ M je zaprta (ko ji dodamo 0), saj jo lahko predstavimo kot sliko zvezne preslikave

$$\left(\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}\right)^M \to [0, M],$$

ki sešteje M-terico števil na levi. Od tod sledi $\mathcal{E}(v) \leq M$. Tako je v racionalno število in tudi prva domneva je dokazana. ∎

Tretja Josephova domneva je še vedno odprta.

O neskončnih grupah

Pojem verjetnosti komutiranja ima smisel za poljubne grupe, opremljene z verjetnostno mero. V posebnem to naravno velja za kompaktne (Hausdorffove) topološke grupe. Ponovimo, da je topološka grupa G množica, ki je hkrati opremljena s strukturo grupe in topološkega prostora, oboje pa je uglašeno z zahtevo, da sta množenje in invertiranje v G zvezni preslikavi. Vsaka kompaktna topološka grupa G je naravno opremljena s Haarovo mero; to je verjetnostna Borelova mera μ, za katero med drugim velja $\mu(x \cdot E) = \mu(E)$ pri vsakem $x \in G$ in Borelovi množici $E \subseteq G$. Bralec lahko več o Haarovi meri prebere v [8, razdelek I.2].

Primer 16. Opazujmo končno grupo G, opremljeno z diskretno topologijo. Njena Haarova mera μ sovpada z normalizirano mero štetja točk. Torej za podmnožico $A \subseteq G$ velja $\mu(A) = |A|/|G|$.

Primer 17. Opazujmo multiplikativno grupo S^1 kompleksnih števil absolutne vrednosti 1. Tukaj je Haarova mera merljive množice $A \subseteq S^1$ enaka vrednosti $\lambda(\{t \in [0,1] : e^{2\pi it} \in A\})$, kjer je λ običajna Lebesgueova mera na intervalu $[0,1]$.

Pare elementov iz grupe G slučajno izbiramo iz produktnega prostora $G \times G$, opremljenega z verjetnostno produktno mero $\mu \times \mu$. Komutiranje v G izrazimo z zvezno preslikavo $k\colon G \times G \to G$, $k(x,y) = x^{-1}y^{-1}xy$. Komutirajoči pari so natanko množica $k^{-1}(\{1\})$. Verjetnost komutiranja v grupi G je tako enaka

$$\mathrm{vk}(G) = (\mu \times \mu)(k^{-1}(\{1\})) = \int_{k^{-1}(\{1\})} \mathrm{d}(\mu \times \mu).$$

Ni se težko prepričati, da tudi za kompaktne grupe velja izrek o verjetnostni luknji. Tokrat predstavimo elementarnejši dokaz, ki se izogne teoriji upodobitev.

Trditev 18 ([6] – Gustafson 1973). *Interval* $(\frac{5}{8}, 1)$ *ne vsebuje verjetnosti komutiranja nobene kompaktne grupe.*

Dokaz. Verjetnost komutiranja kompaktne grupe G izrazimo kot

$$\int_{k^{-1}(\{1\})} \mathrm{d}(\mu \times \mu) = \int_G \int_{C_G(x)} \mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \mu(C_G(x))\,\mathrm{d}\mu(x),$$

kjer prva enakost sledi po Fubinijevem izreku. Razdelimo verjetnost komutiranja na dva dela,

$$\mathrm{vk}(G) = \int_{Z(G)} \mu(C_G(x))\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{G-Z(G)} \mu(C_G(x))\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Predpostavimo, da G ni komutativna. Tedaj kvocientna grupa $G/Z(G)$ grupe G po svojem centru ni ciklična, zato je $|G : Z(G)| \geq 4$. Ker je G disjunktna unija odsekov po centru, sledi $\mu(Z(G)) \leq \frac{1}{4}$. Za tiste elemente $x \in G$, ki ne pripadajo centru, velja neenakost $|G : C_G(x)| \geq 2$ in zato $\mu(C_G(x)) \leq \frac{1}{2}$. Zdaj velja

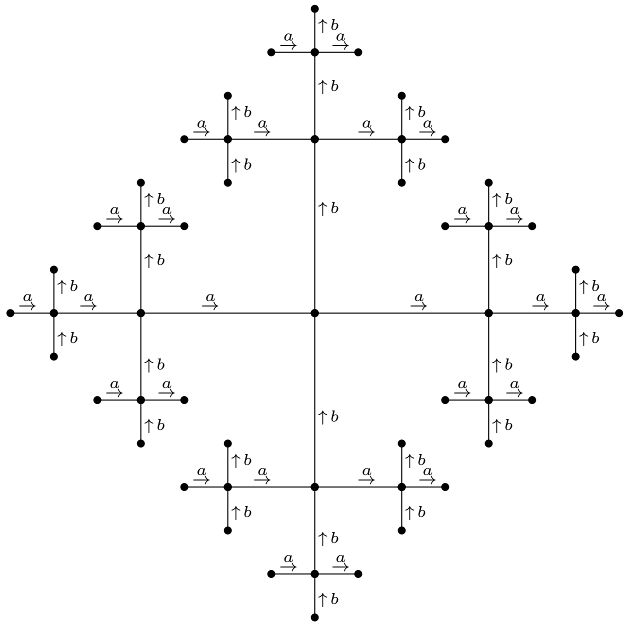
$$\mathrm{vk}(G) \leq \mu(Z(G)) \cdot 1 + \mu(G - Z(G)) \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{\mu(Z(G))}{2} + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{8},$$

s čimer je dokaz zaključen. ∎

Nekoliko bolj izvirna definicija verjetnosti komutiranja je potrebna za neskončne grupe, ki same po sebi niso opremljene z verjetnostno mero. Avtorji [1] k temu problemu pristopijo s stališča geometrijske teorije grup. Vsaki končno generirani grupi G, generirani s simetrično množico $X = X^{-1}$, lahko priredimo njen Cayleyjev graf $\mathrm{Cay}(G, X)$. Vozlišča tega grafa so elementi grupe G, med elementoma $x, y \in G$ pa obstaja povezava, če in samo če je $x^{-1}y \in X$.

Primer 19. Naj bo F prosta grupa na dveh generatorjih a, b. Njeni elementi so okrajšane besede s črkami iz množice $X = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Cayleyjev graf $\mathrm{Cay}(F, X)$ dobimo tako, da vsako besedo povežemo z njenim nadaljevanjem z vsako od črk iz množice X. Ta graf je neskončen in je delno prikazan na sliki 3. V središču je enota 1 grupe F. Ko jo podaljšamo z vsakim elementom množice X, dobimo njene sosede a, a^{-1}, b, b^{-1}. Vsakega od teh lahko zopet podaljšamo. Pri tem upoštevamo še krajšanje besed, na primer $aa^{-1} = 1$. Če se torej v grafu sprehodimo od enote 1 v smeri »desno-gor-levo«, prispemo do elementa aba^{-1}.

Cayleyjev graf lahko opremimo z naravno metriko: za razdaljo $d_X(x, y)$ med vozliščema x in y razglasimo število povezav na najkrajši poti med x in y. Namesto algebraičnega objekta G tako lahko opazujemo metrični prostor $\mathrm{Cay}(G, X)$. Verjetnost komutiranja lahko izmerimo v vsakem končnem kosu tega metričnega prostora, cel prostor pa lahko izčrpamo s končnimi množicami, najbolj naravno kar s kroglami okoli enote



Slika 3. Del Cayleyjevega grafa proste grupe z generatorjema a, b.

$\mathbb{B}_X(n) = \{x \in G : d_X(x,1) \leq n\}$. V tem jeziku slika 3 prikazuje kroglo $\mathbb{B}_X(3)$ Cayleyjevega grafa proste grupe. Stopnja komutiranja (v tej splošnosti ne moremo govoriti več o verjetnosti) v grupi G je

$$\mathrm{sk}(G,X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|\{(x,y) \in \mathbb{B}_X(n) \times \mathbb{B}_X(n) : xy = yx\}|}{|\mathbb{B}_X(n)|^2}.$$

Antolín, Martino in Ventura dokažejo, da za grupe G polinomske besedne rasti (to pomeni, da velikosti krogel $\mathbb{B}_X(n)$ rastejo kvečjemu polinomsko z n) v zgornji definiciji obstaja celo limita ter da je ta neodvisna od izbire končne generirajoče množice X. Poleg tega avtorji premislijo, da je v takih grupah stopnja komutiranja pozitivna le v izjemnih primerih.

Trditev 20 ([1] – Antolín, Martino in Ventura 2017). *Naj bo G grupa, generirana s končno množico X. Predpostavimo, da je G polinomske rasti. Tedaj je $\mathrm{sk}(G,X) > 0$ natanko tedaj, ko ima G komutativno podgrupo končnega indeksa.*

Predpostavka o polinomski rasti je precej omejujoča. Grupe s to lastnostjo so natanko grupe, ki imajo nilpotentno podgrupo končnega indeksa [4]. Ko nasprotno opazujemo grupe s hitro, eksponentno rastjo, so te daleč stran od komutativnih in avtorji pričakujejo, da je njihova stopnja komutiranja ničelna.

To domnevo znajo potrditi za precej širok razred grup s takšno rastjo, in sicer hiperbolične grupe [5]. To so grupe, katerih Cayleyjev graf je videti kot hiperbolični prostor v naslednjem smislu:

obstaja $\delta > 0$, pri katerem je vsak trikotnik v $\mathrm{Cay}(G, X)$ δ-ozek.

Tukaj s pojmom trikotnik mislimo izbiro treh točk v grafu in geodetskih poti med njimi, izraz δ-ozek pa pomeni, da je vsaka točka na kateremkoli robu trikotnika oddaljena za največ δ od vsaj ene točke na uniji drugih dveh robov trikotnika. V takem metričnem prostoru so torej trikotniki negativno ukrivljeni, podobno kot v hiperboličnem prostoru.

Primer 21. Proste grupe so hiperbolične. Kot smo videli v primeru 19, so njihovi Cayleyjevi grafi neskončna drevesa in trikotniki v njih so zelo ozki.

Primer 22. Lep primer hiperbolične grupe je modularna grupa transformacij hiperbolične ravnine $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Ta sestoji iz preslikav oblike

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

kjer so a, b, c, d cela števila, za katera velja $ad - bc = 1$. Opremljena je z operacijo komponiranja preslikav. Ni težko preveriti, da preslikavi $S\colon z \mapsto -1/z$ in $T\colon z \mapsto z+1$ generirata to grupo. Preslikava S je kompozicija inverzije preko enotske krožnice in zrcaljenja preko imaginarne osi, preslikava T pa enotska translacija. Generatorja zadoščata relacijama $S^2 = (ST)^3 = 1$. S tema dvema relacijama je modularna grupa enolično določena in jo v tem smislu lahko podamo kot končno prezentirano grupo $\langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$. Ko postavimo $X = \{S, S^{-1}, ST, (ST)^{-1}\}$, si lahko Cayleyjev graf te grupe glede na X predstavljamo sorodno kot graf na sliki 3, le da moramo v slednjem mnogo vozlišč identificirati. V Cayleyjevem grafu modularne grupe obstajajo dvocikli zaradi enakosti $S^2 = 1$ in tricikli zaradi enakosti $(ST)^3 = 1$.

Ko prosti grupi dodajamo naključne dolge relacije, skoraj vedno dobimo hiperbolično grupo.

Izrek 23 ([5] – Gromov 1987, [12] – Ol'shanskiĭ 1992). *Ob danih naravnih številih $n \geq 2$ in $k \geq 1$ enakomerno in neodvisno iz proste grupe z n generatorji $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izberimo besede $r_1, r_2, \ldots, r_k$ dolžine največ ℓ. Naj bo $G = \langle a_1, \ldots, a_n \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$ kvocient proste grupe po teh relacijah. Tedaj verjetnost, da je G hiperbolična grupa, konvergira proti 1, ko gre ℓ proti neskončno.*

Vsako končno generirano grupo lahko predstavimo kot kvocient proste grupe. Kadar za to potrebujemo le končno mnogo relacij, je torej grupa v smislu izreka 23 skoraj zagotovo hiperbolična. Če izključimo tiste, ki vsebujejo ciklično podgrupo končnega indeksa, zanje velja naslednji rezultat.

Trditev 24 ([1] – Antolín, Martino in Ventura 2017). *Naj bo G hiperbolična grupa, generirana s končno množico X. Predpostavimo, da G ne vsebuje ciklične podgrupe končnega indeksa. Tedaj je* $\mathrm{sk}(G, X) = 0$.

Nazadnje imajo torej skoraj vse (končno prezentirane) grupe ničelno stopnjo komutiranja. Temu primerno naš izlet po verjetnosti komutiranja končajmo z enim Šalamunom –

nič nič nič nič

fiuuuuu še ena gobica

LITERATURA

[1] Y. Antolín, A. Martino in E. Ventura, *Degree of commutativity of infinite groups*, Proc. Am. Math. Soc. **145** (2017), 479–485.

[2] S. Eberhard, *Commuting probabilities of finite groups*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), 796–808.

[3] P. Erdös in P. Turán, *On some problems of a statistical group-theory. IV*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **19** (1968), 413–435.

[4] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **53** (1981), 53–73.

[5] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory **8** (1987), 75–263.

[6] W. H. Gustafson, *What is the probability that two group elements commute?*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 1031–1034.

[7] G. H. Hardy in S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. Lond. Math. Soc. **2** (1918), 75–115.

[8] M. Hladnik, *Uvod v harmonično analizo na lokalno kompaktnih grupah*, zapiski predavanj, Ljubljana, 2006, dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~hladnik/3st/HA.pdf`, ogled 21. 12. 2018.

[9] K. Joseph, *Several conjectures on commutativity in algebraic structures*, Amer. Math. Monthly **84** (1977), 550–551.

[10] D. MacHale, *Commutativity in finite rings*, Amer. Math. Monthly **83** (1976), 30–32.

[11] P. Moravec, *Osnove upodobitev končnih grup*, Samozal., Ljubljana, 2018, dostopno na `www.fmf.uni-lj.si/~moravec/Papers/upodob_moravec.pdf`, ogled 21. 12. 2018.

[12] A. Yu. Ol'shanskiĭ, *Almost every group is hyperbolic*, Internat. J. Algebra Comput. **2** (1992), 1–17.

[13] V. Ponomarenko in N. Selinski, *Two semigroup elements can commute with any positive rational probability*, College Math. J. **43** (2012), 334–336.

[14] D. J. Rusin, *What is the probability that two elements of a finite group commute?*, Pacific J. Math. **82** (1979), 237–247.

O TEMPERATURI LEDU NA VODI

JOŽE RAKOVEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 05.70.Np, 44, 92.10 Rw

Opisana je temperatura površine ledu na vodi, kot sledi iz izmenjave toplote med vodo, ledom in zrakom nad njim: prevajanje iz vode skozi led in naprej v zrak nad njim, infrardeče sevanje s površine ledu navzgor in infrardeče sevanje iz ozračja navzdol in poraba toplote ob sublimaciji vodne pare s površine ledu v nenasičen zrak nad njim. Vertikalna konvekcija, horizontalna advekcija ter turbulentno mešanje zraka nad ledom so obravnavani samo kvalitativno, sončno obsevanje ledu pa je zaradi beline ledu zanemarjeno.

ON TEMPERATURE OF ICE ON THE WATER

The temperature of the surface of ice on the water is described as follows from heat exchanges between water, ice and air: the heat conduction from the water through the ice and further into the air above it, the upwards infrared radiation from the surface of the ice and the downwards infrared radiation from the atmosphere and the latent heat needed for the sublimation of water vapor from the ice surface into the non-saturated air above it. Vertical convection, horizontal advection and turbulent mixing in the air above the ice are considered only qualitatively, while solar irradiation of the ice is neglected due to ice's whiteness.

Uvod

Jožef Stefan je seveda najbolj poznan po svojem zakonu o sevanju črnega telesa. Ukvarjal pa se je še z marsičim, npr. tudi z debeljenjem ledu na vodni površini [3]. Gre za nalogo o t. i. premični meji, ki se pogosto imenuje kar po njem (npr. Stefanova naloga na Wikipediji). Stefan je debeljenje ledu opisal z enačbo, ki pove, da se toplota, ki se ob nastanku nove plasti ledu debeline dh v času dt ob zmrzovanju vode v led sprosti na spodnji strani ledu (latentna toplota zmrzovanja/taljenja q_t), prevaja skozi led proti površini ledu. Zato mora biti temperatura ob površini ledu za ΔT nižja od tiste na meji z vodo. Skoraj vse oznake za količine, ki opisujejo dogajanje, so danes standardno drugačne od Stefanovih – on v tej objavi npr. označi latentno toploto zmrzovanja vode s σ – dandanes je σ skoraj izključno »rezervirana« za njegovo in Boltzmannovo konstanto. Stefanova izhodiščna enačba, prepisana z danes običajnimi oznakami, je $q_t \rho_l dh = \lambda_l \Delta T / h dt$ (ρ_l in λ_l sta gostota in toplotna prevodnost ledu, h pa njegova debelina). Stefan se ni spraševal o tem, kaj je s toploto, ko skozi led pride na površje (čeprav je seveda poznal pomembnost sevanja, pa tudi latentne toplote izhlapevanja ali sublimacije – npr. [4, 2]). Upošteval je samo, da se ob zmrzovanju na spodnji meji ledu toplota sprošča in da se ta toplota skozi led prevaja navzgor. Ker se led debeli (spodnja meja se premika), postane od kraja in od časa odvisna naloga kar zapletena.

Ob 150. obletnici Stefanovega rojstva in 100. obletnici smrti je o Stefanovi nalogi za Obzornik pisal tudi prof. Janez Strnad [6], kasneje pa o ledu na vodi na preprostejši način tudi v Preseku [5]. V Preseku je npr. razložil, da za obstoj življenja v vodi pod ledom ni predvsem »zaslužna« zanimiva lastnost vode, ki je najgostejša pri 4 °C. Pojasnil je, da je glavni razlog za to, da je led na jezerih in mirnih rekah le ob površini, ne pa tudi ob dnu, ta, da je led redkejši od vode in zato plava ob gladini. Držal se je Stefanovega načina zgolj s prevajanjem toplote, dodal pa je še prevajanje skozi tanko laminarno mejno plast zraka nad ledom, da je lahko v obravnavo vključil tudi temperaturo zraka T_z tik nad to plastjo. Toliko toplote, kot je pride do površine ledu s prevajanjem skozi trdno snov (led) $j = -\lambda_l \frac{T_l - T_v}{h}$, je prehaja tudi navzgor skozi mejno plast zraka tik nad ledom $j = K(T_l - T_z)$. Tu so λ_l toplotna prevodnost ledu (vzel je 2,3 W/mK) in h njegova debelina, T_v in T_l sta temperaturi ledu na meji z vodo (T_v spodaj, enaka temperaturi vode) in na površini ledu (T_l zgoraj na meji z zrakom), K je koeficient prehajanja toplote skozi mejno plast zraka (Strnad je uporabil oznako α in za brezvetrje je npr. vzel 5,6 W/m^{2}K) in T_z je temperatura zraka na vrhu mejne plasti zraka. Glede na relativno toplejšo vodo je zato, da toplota vedno teče navzgor, spodaj toplo, zgoraj pa hladno: $T_v > T_l > T_z$.

Prevajanje toplote skozi led ne potrebuje kake dodatne razlage, za prehajanje toplote skozi mejno plast zraka pa utegne biti koristno kratko pojasnilo. Gre pravzaprav za prevajanje skozi zelo tanko plast zraka (debeline δ samo nekaj milimetrov), ki je nekako »prilepljena« ob površino in zato zrak v njej povsem miruje – torej prevajanje toplote. Čeprav je prevodnost λ_z zraka zelo majhna, pa so skozi mejno plast temperaturne razlike zelo velike, pa tudi razdalja δ je zelo majhna. Torej je $K \approx \lambda_z/\delta$ in iz podatka o uporabljeni vrednosti za K in za $\lambda_z = 0{,}025$ W/m^{2}K, lahko ocenimo δ na približno 4 mm.

Niti Stefan niti Strnad v obravnavo nista vključila še drugih možnih izmenjav toplote med ledom in ozračjem – za njuni obravnavi to ni bilo potrebno. Prvi je namreč za zgornji robni pogoj predpisal temperaturo površine ledu, drugi pa temperaturo zraka ob vrhu mejne plasti. Poglejmo, kateri so še možni načini izmenjave toplote in kaj doprinesejo k temperaturi površine ledu. Telesa med seboj izmenjujejo toploto na več načinov. Ponavadi naštevamo tri: poleg prevajanja še sevanje in konvekcijo. Pa to še ni vse: kaj pa morebitno izhlapevanje vode? Za izhlapevanje je potrebna toplota. Torej se površina, s katere izhlapeva voda, s porabo toplote za izhlapevanje hladi – izhlapevanje odnaša toploto proč od nje. Ta toplota je potem »skrita« v zraku (zato ji rečemo tudi latentna toplota) ob dejstvu, da je izhlapela voda sedaj v zraku kot para z višjo entalpijo. Nasprotno kondenzacija pomeni sproščanje latentne toplote (para se spreminja nazaj v vodo ali v led – npr. rosa ali slana na tleh). Pri izhajanju pare z ledu ne rečemo, da para izhlapeva iz ledu, temveč, da sublimira – poseben izraz uporabimo zato, da poudarimo, da ne gre za spremembo iz tekoče vode v paro, ampak iz ledu v paro; obratni pojav je depozicija pare. Toplotne izmenjave so torej: poleg že obravnavanega prevajanja še sevanje, sublimacija vodne pare iz ledu, konvekcija. A še vedno to ni vse: kaj pa mešanje zraka nad ledom? Ob vetru se v zraku pojavlja turbulenca, ki premika in meša dele bolj hladnega in bolj toplega zraka. To pomeni turbulentni prenos toplote od tam, kjer je temperatura višja, tja, kjer je nižja. Torej: če je led toplejši od zraka nad njim, turbulentna difuzija lahko znižuje temperaturo zraka ob mejni plasti, kar lahko vpliva tudi na temperaturo površine ledu. Obratno velja ob toplejšem zraku – toda v takih primerih stabilne zračne plasti (spodaj hladno, zgoraj topleje) je turbulenca dušena in zato le šibka.

Samo prevajanje toplote

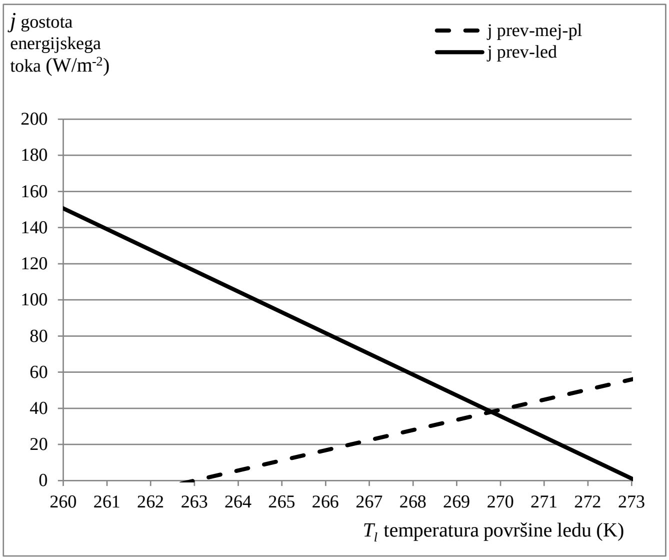
Če upoštevamo samo prevajanje toplote skozi led in njeno prehajanje skozi mejno plast zraka, potem mora ob zelo počasnem spreminjanju razmer (skoraj stacionarno stanje) toliko toplote preiti s površine ledu v zrak nad njim, kot je do površine pride iz globin:

$$K(T_l - T_z) = \lambda_1 \frac{T_v - T_l}{h}. \tag{1}$$

Od tod izvemo, da je temperatura ledu na površini T_l uteženo povprečje med temperaturo vode in temperaturo zraka in odvisna od debeline ledu – čim debelejši je led, tem manj njegova površina »čuti« vodo pod njim in tem bolj zrak nad njim:

$$T_l = \frac{\frac{\lambda_l}{h} T_v + K T_z}{\frac{\lambda_l}{h} + K}. \tag{2}$$

Če izberemo za temperaturo vode pod ledom 0 °C = 273 K, za temperaturo zraka ob vrhu mejne plasti −10 °C = 263 K in za debelino ledu 20 centimetrov, dobimo pri izbrani vrednosti za K (torej ob brezvetrju) za temperaturo površine ledu 269,8 K = −3,4 °C.



Slika 1. Gostoti toka prevajanja toplote skozi led in skozi laminarno mejno plast zraka nad njim. Čim toplejša je površina ledu, tem manj se razlikuje od temperature vode pod ledom in tem bolj od temperature zraka nad mejno plastjo: zato ena krivulja upada, druga pa narašča s temperaturo ledu. Križata se pri 269,8 K = −3,4 °C.

Led bi bil pri tej debelini ob upoštevanju samo prevajanja toplote za 6,8 °C toplejši od zraka nad laminarno mejno plastjo. Ko poznamo T_l, poznamo gostoto toplotnega toka: okrog 38 W/m^2.

Sevanje

Lotimo se še sevanja. Površina ledu namreč tudi seva. Zanimivo je, da v območju infrardečega sevanja (IR), torej pri temperaturi okrog 0 °C (okrog 273 K) led seva skorajda kot črno telo – po Stefanovem zakonu. Led je v infrardečem torej črn! (Kdo bi si mislil? Pa je tako – praktično vse snovi okrog nas so v infrardečem sevalno črne – izjeme so le izglajene kovine, kot so nanosi na ogledala. Črn tudi ni zrak nad nami.) Torej led sevalno oddaja toploto navzgor z gostoto energijskega toka

$$j_{\uparrow} = \varepsilon_l \sigma T_l^4.$$

Tu je ε_l emisivnost ledu – če je led res skorajda »črn«, je ta praktično enaka ena (recimo med 0,95 in 1), σ pa Stefan-Boltzmannova konstanta ($5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}). Kam gre to sevanje? Seveda navzgor. Koliko ga absorbira zrak in koliko ga gre skozi ozračje še naprej v vesolje? To je odvisno od absorptivnosti zraka. Če bi zrak absorbiral kot črno telo, bi vse to sevanje segrevalo zrak. Pa ni tako. Zrak v infrardečem ni črn, ampak nekatere njegove sestavine absorbirajo v posameznih pasovih v infrardečem. Temu rečemo učinek tople grede, ki je zelo pomemben za klimo na Zemlji. Ker se tukaj s klimo ne ukvarjamo, povejmo samo, da sta glavna absorberja v zraku vodna para (okrog 60 % učinka tople grede) in ogljikov dioksid (okrog 26 %) in ta dva, skupaj s še nekaterimi plini v zraku (preostalih 14 %), ob jasnem nebu absorbirajo okrog 70 %-IR sevanja; preostalih 30 % pa gre v vesolje. Snov, ki absorbira (lastnost, da energijo sevanja lahko sprejme), ima tudi lastnost, da sevanje tudi oddaja: sposobnost absorpcije sevanja (absorptivnost α) je enaka sposobnosti oddajanja sevanja (emisivnost ε). Za emisivnost zraka nad ledom torej predpišimo vrednost ε_{zr}.

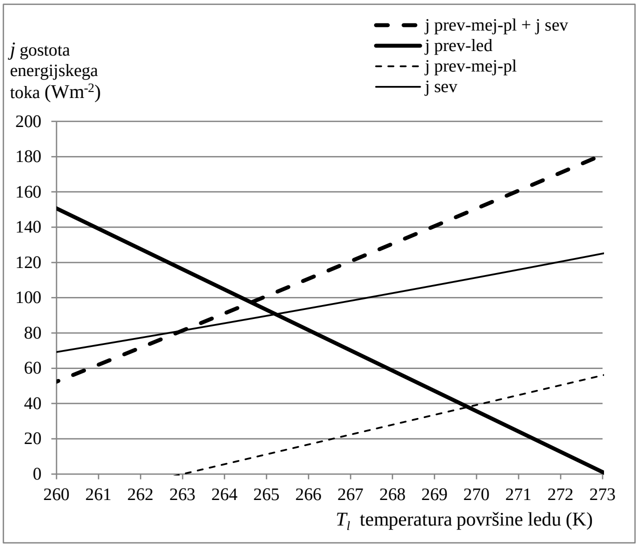
Sedaj moramo še izbrati primerni vrednosti za ε_{zr} in za temperaturo zračne plasti, ki seva. Čim bolj je zrak suh (čim manj je v njem vodne pare), tem debelejša plast zraka je potrebna, da je v njej dovolj pare, da opravi svojo celotno »sevalno nalogo«. Ponavadi je ta debelina nekaj deset metrov, morda tudi sto metrov. Tako debela plast pa nima nujno vsa enake temperature. Ponavadi je podnevi najtopleje pri tleh, ponoči in zjutraj pa je pri tleh najbolj mraz. No, če se zadovoljimo z zelo grobim približkom (samo zato, da je obravnava preprostejša), potem vzamemo, da ima celotna plast, ki absorbira in seva, kar enako temperaturo, kot je tik nad mejno plastjo zraka nad ledom, torej $T_{zr} = T_z$. Kaj pa emisivnost ε_{zr}? Vemo, da se ob jasnih, suhih nočeh močno ohladi, kar privede npr. do jutranje rose (pozimi pa slane), ob vlažnih ali celo oblačnih jutrih pa se ohladi dosti manj – npr. da na tleh sploh ni rose (ali slane). Torej tudi emisivnost zračne plati ni kar konstantna. Spet zaradi preprostosti vzemimo kar že omenjenih 70 % – torej $\varepsilon_{zr} = 0{,}7$. Tedaj zrak seva navzdol proti površini ledu:

$$j_{\downarrow} = \varepsilon_{zr} \sigma T_{zr}^4.$$

Sedaj ima enačba za izmenjavo toplote dva dodatna sevalna člena:

$$K(T_l - T_z) + \sigma\varepsilon_l T_l^4 - \sigma\varepsilon_{zr} T_{zr}^4 = +\lambda_l \frac{T_v - T_l}{h}. \tag{3}$$

Vnaprej predvidevamo, da bo sedaj led hladnejši, saj sam seva skoraj kot črno telo (skoraj »stoodstotno«) in z višjo temperaturo, zrak proti njemu pa manj – samo okrog 70-odstotno in z nižjo temperaturo (privzeli smo, da je led toplejši od zraka). Ker enačba vsebuje četrto potenco temperature ledu, bo najlažje, če za izbrane vrednosti koeficientov v njej poiščemo rešitev kar z risanjem. Spet vzemimo za temperaturo vode pod ledom 0 °C = 273 K, za temperaturo zraka −10 °C = 263 K in za debelino ledu 20 centimetrov. Za ε_l vzamemo kar vrednost 1 in za ε_{zr} vrednost 0,7. Če uporabimo izbrane vrednosti, risba pokaže rešitev enačbe pri $T_l = 264{,}5\ \mathrm{K} = -8{,}7\ °\mathrm{C}$. Sevanje torej za privzete vrednosti (npr. jasno nebo, miren zrak) zniža temperaturo površine ledu od prejšnjih −3,4 °C za dodatnih 5,3 °C na −8,7 °C. Vsi pa vemo, da se ob oblačnih nočeh manj ohladi – oblaki sevajo proti tlom kot črno telo s svojo temperaturo. Kaj pa sončno obsevanje podnevi? Če je led zelo bel, je segrevanja od sonca manj, starejši, temnejši led pa sončno obsevanje lahko čez dan segreva.



Slika 2. Prevajanje toplote skozi mejno plast in sevanje; presečišče debelejše neprekinjene krivulje (prevajanje skozi led) in debelejše črtkane krivulje (prevajanje skozi mejno plast in sevanje) je pri $T_l = 264{,}5\ \mathrm{K} = -8{,}7\ °\mathrm{C}$.

Ko poznamo temperaturo ledu, lahko (pri privzeti temperaturi plasti zraka, ki seva navzdol $T_{zr} = T_z = -10\ °\mathrm{C}$), ocenimo neto sevalni tok (navzgor) na malo manj kot 90 $\mathrm{W/m^2}$. Več kot dvakrat toliko, kot s prevajanjem toplote! Sevanja torej nikakor ne smemo zanemariti!

Sublimacija – s površine ledu izhaja para

Tudi v krajih, kjer je pozimi mraz, je treba posušiti perilo. Ljudje vedo, da se posuši tudi, če potem, ko ga obesijo na prosto, najprej zmrzne. Odvisno od temperature in vetra pač malo dlje traja, da je perilo suho. Ko ga obesijo na sušilno vrv, naprej iz njega voda izhlapeva, ko pa se ohladi pod 0 °C, pa seveda zmrzne. Iz njega še vedno izhaja (sublimira) vodna para – je pa sušenje počasnejše, ker je za pretvorbo tekoče vode v paro potrebna toplota izhlapevanja $q_i = 2{,}5$ MJ/kg toplote, za pretvorbo iz ledu v paro pa je sublimacijska toplota za 0,3 MJ/kg večja – torej $q_s = 2{,}8$ MJ/kg za vsak kilogram.[1]

Skozi laminarno mejno plast so po Reynoldsovi analogiji prenosi zaznavne toplote, pare, gibalne količine podobni (glej npr. [12]). Torej bi lahko tudi za gostoto toka vodne pare zapisali $j_{\rm para} = K_\rho\,(\rho_{v,l} - \rho_{v,\delta})$, kjer je $K_\rho = D/\delta$, D je difuzivnost za vodno paro skozi miren zrak, $\rho_{v,l}$ in $\rho_{v,\delta}$ pa sta gostoti vodne pare tik ob ledu in na vrhu laminarne mejne plasti. Temu ustrezen tok sublimacijske toplote je torej

$$j_s = q_s \frac{D}{\delta}\left(\rho_{v,l} - \rho_{v,\delta}\right).$$

Za paro skozi miren zrak je pri temperaturi nekoliko pod 0 °C difuzivnost D okrog $2\cdot 10^{-5}$ m^2/s (npr. [10]), debelino δ pa smo že ocenili na okrog 4 mm. Torej je tok sublimacijske toplote navzgor odvisen samo še od razlik gostot vodne pare. Kakšni sta ti dve gostoti? Tik nad ledom je stanje nasičeno, ob vrhu mejne plasti pa je vodne pare ob suhem vremenu manj, ob bolj vlažnem pa več. Do sedaj smo prišli do dveh ocen za temperaturo površine ledu: okrog -3 °C in okrog -8 °C; torej za prvo oceno vzemimo, da ima površina ledu temperaturo -5 °C. (Bolj natančna ocena upošteva, da je $\rho_{v,l}$ funkcija temperature ledu T_l; o tem malo kasneje). Pri tej temperaturi je nasičena gostota vodne pare nad ledom $\rho_{v,l} = 0{,}0032\ \mathrm{kg/m^3}$ (npr. iz kakšnih tabel za nasičeno stanje nad ledom). Gostota ob vrhu mejne plasti ρ_δ pa je odvisna od tega, kako je zrak suh in kako učinkovito veter odnaša

[1] Večina ljudi misli oz. je naučena v šoli, da se voda spreminja v paro pri 100 °C. Toda – skoraj vsa para na svetu izhlapi pri temperaturah okrog 15 do 25 °C – taka je namreč temperatura oceanov in večinoma tudi tal, iz katerih izhlapeva voda. Seveda para izhaja tudi iz ledu – torej pri še nižjih temperaturah. Spreminjanje v paro pri 100 °C je torej izjema – npr. v domači kuhinji in pri tej temperaturi je izparilna toplota 2,3 MJ/kg. Pri še višjih temperaturah voda izpareva npr. v industriji ali v termoelektrarnah. Torej: voda na naši Zemlji se spreminja v paro predvsem pri temperaturah, ki vladajo v zraku pri tleh in le neznaten del se je spremeni v paro pri temperaturah okrog 100 °C.

paro iznad njega. Če je ledena površina majhna, morda veter prinaša nad led iz suhe okolice suh zrak. Če pa je ledena površina velika, potem velja horizontalna homogenost in veter neposredno na odnašanje pare ne vpliva (pač pa vpliva na turbulenco in s tem na prenos navzgor – a o tem kasneje pri vplivu turbulentnega mešanja). Vzemimo, da je pri temperaturi zraka -10 °C zrak precej suh, npr. z relativno vlažnostjo 30 %. To pri -10 °C pomeni gostoto vodne pare okrog $\rho_{v,\delta} = 0{,}0006\ \mathrm{kg/m^3}$. Torej je ocenjena razlika gostot $0{,}0026\ \mathrm{kg/m^3}$.

Izračunajmo gostoto toka sublimacijske toplote: okrog $36\ \mathrm{W/m^2}$ – približno toliko, kot pri prevajanju skozi led in skozi mejno plast. Vpliv izhajanja pare iz ledu je približno tolikšen, kot prevajanje skozi mejno plast! Ob upoštevanju samo prevajanja in sublimacije bi toplota, ki od spodaj pride skozi led na njegovo površino, približno zadostovala za sublimacijo v paro!

Naredimo oceno znižanja temperature, ko prevajanju zaznavne toplote dodamo samo tok latentne (sublimacijske) toplote, pri istih T_z in T_v kot prej:

$$K(T_l - T_z) + j_s = +\lambda_l \frac{T_v - T_l}{h}, \tag{4}$$

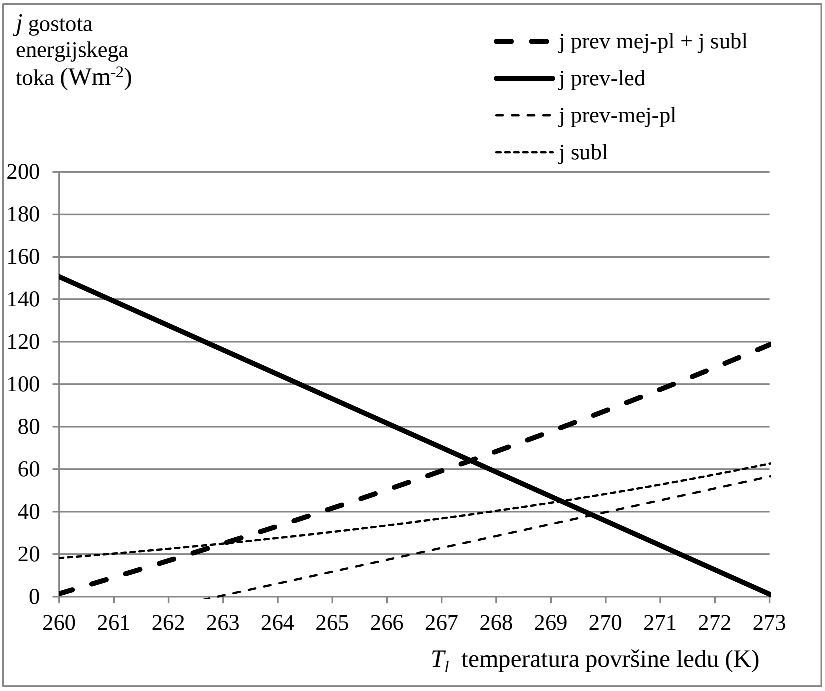
oziroma

$$T_l = \frac{\frac{\lambda_l}{h} T_v + K T_{zr}}{\frac{\lambda_l}{h} + K} - \frac{j_s}{\frac{\lambda_l}{h} + K}. \tag{5}$$

Znižanje temperature za $j_s / \left(\frac{\lambda_l}{h} + K \right)$ je spet odvisno od debeline ledu; ponovno izberimo debelino 20 cm in dobimo znižanje temperature samo zaradi sublimacije za nekaj več kot 2 °C.

Natančnejšo oceno vpliva sublimacije dobimo, če nasičeno gostoto vodne pare preko Clausius-Clapeyronove enačbe $p_{nas}(T) = p_{nas,0} e^{\frac{q_s}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}$ izrazimo s temperaturo. Tu je $p_{nas}(T)$ nasičeni parni tlak vodne pare (v tem primeru nad ledom) pri temperaturi T, $p_{nas,0}$ je izhodiščna vrednost pri izhodiščni temperaturi: $p_{nas,0}(T_0 = 0\ °\mathrm{C}) = 6{,}1\ \mathrm{hPa}$, q_s je že večkrat omenjena sublimacijska toplota in $R_v = 461\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$ specifična plinska konstanta za vodno paro. Ker velja tudi $\rho_{nas} = \frac{p_{nas}}{R_v T}$, lahko zapišemo vrednost nasičene gostote vodne pare tik nad ledom v odvisnosti od temperature površine ledu kot $\frac{p_{nas,0}}{R_v T_l} e^{\frac{q_s}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_l}\right)}$. Enačbo prepišemo v obliko, ki omogoča risanje križanja dveh krivulj, ki pove, kakšna je T_l:

$$\left(K + \frac{\lambda_l}{h}\right) T_l + q_s \frac{D}{\delta} \left(\frac{p_{nas,0}}{R_v T_l} e^{\frac{q_s}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_l}\right)} - \rho_{v,z} \right) = +\lambda_l \frac{T_v - T_l}{h}. \tag{6}$$



Slika 3. Če prevajanju skozi mejno plast dodamo gostoto toka sublimacijske toplote, je temperatura površine ledu (križišče debelejše neprekinjene in debelejše prekinjene črte) $T_l = 267{,}5$ K $= -5{,}7$ °C – v primerjavi z zgolj prevajanjem skozi mejno plast za 2,3 °C nižja. Pri prejšnji grobi oceni o $T_l = -5$ °C torej nismo bili daleč od natančneje določene vrednosti.

Izhlapevanje poleti lahko močno hladi – pri višjih temperaturah je pač razlika gostot vodne pare večja (pri višjih temperaturah je Clausius-Clapeyronova krivulja »bolj strma«). A tudi pozimi in tudi z ledu je izhajanje pare očitno pomembno. Je pa tu treba poudariti še en pogoj: jakosti prehajanja v paro ne določa zgolj razlika gostot vodne pare, ampak tudi (in pogosto predvsem) količina toplote, ki je na razpolago za izhlapevanje ali za sublimacijo. Včasih toplote pač ni dovolj in zato je celo poleti, ko je razpoložljive energije za izhlapevanje več, izhlapevanje dosti manjše od maksimalno možnega glede na razliko gostot. In še: saj tla niso vedno povsem mokra in zato tik nad njimi ni nasičenja. Pa še ni konec: tla so (vsaj pri nas) pokrita z vegetacijo – ta pa predvsem podnevi deluje kot črpalka za vodno paro. Zato meteorologi računajo potencialno evapotranspiracijo PE: potencialna bi veljala za primer povsem mokrih tal, transpiracija pa opozarja na dodaten vpliv vegetacije. PE je po dogovorjeni metodi [11] računana količina, saj jo je meriti precej težko. Računi povedo, da pri nas poleti v povprečju izhlapi kakih 150 kg/m^2 v celem mesecu, kar je okrog 0,2 kg/m^2 na uro, pozimi pa v povprečju med 10 in 20 kg/m^2 v celem mesecu oz. 0,02 kg/m^2 na uro (glej npr. [7, 8]), čemur bi ustrezala gostota toka sublimacijske toplote j_s okrog 15 W/m^2. V mesečnem povprečju so zajeti suhi pa tudi vlažni dnevi, ko izhlapevanja ali sublimacije skoraj ni. Če pa vzamemo neki zelo suh dan (in morda še nekaj vetra), pa bi morda prišli na kakih 50 W/m^2. Ne glede na vse negotovosti pri računanju EP, ki se jih meteorologi zavedajo, pa smo spoznali, da hlajenja z izhlapevanjem (v toplem delu leta) ali s sublimacijo (ko je mraz) ni pametno zanemariti!

Konvekcija in turbulentno mešanje

Za izhlapevanje ali za sublimacijo v zrak pri tleh ni pomembna samo tanka laminarna plast: če sta nad njo veter in s tem turbulenca, sta izhlapevanje ali sublimacija seveda močnejši. Kajti veter npr. lahko odnaša paro in tako vzdržuje nizko gostoto vodne pare nad laminarno plastjo, poleg tega pa izhlapevanje ali sublimacija hladita in je spodaj zato »hladno«.

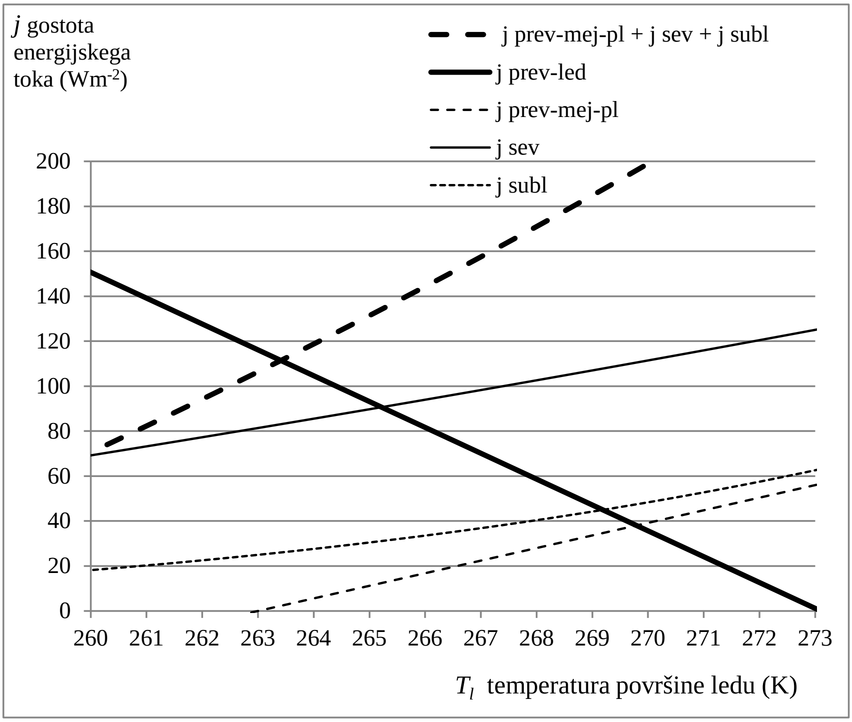
Konvekcija je močna v labilnem ozračju, v močno stabilnem pa lahko povsem zadušena. Stabilnost je odvisna od spremembe temperature z višino $\partial T/\partial z$ v primerjavi z adiabatno spremembo temperature nenasičenega zraka ob njegovem morebitnem dviganju (proti nižjemu tlaku) ali spuščanju (proti višjemu tlaku) $dT/dz = -g/c_p$. V primeru, ki ga privzame Strnad, je led toplejši od zraka, tako da bi se morda lahko pojavilo kaj konvekcije. Toda vsako gibanje zraka navzgor zahteva tudi kompenzacijska spuščanja. Zato se nad homogeno površino proži konvekcija celičnega tipa, ki pa se pojavi le nad izrazito toplo podlago (kot npr. v segretem olju v ponvi – Bénardova konvekcija, glej npr. [9]). Kadar pa je pri tleh mraz, nekoliko višje pa nekaj topleje, imamo t. i. temperaturno inverzijo (inverzija – obratno kot običajno, ko je spodaj topleje, zgoraj pa hladneje). Znano je, da so plasti s temperaturno inverzijo močno hidrostatično stabilne – v njih so vertikalna premikanja zraka močno dušena (razlika med vzgonom in težo pri morebitnem premiku dela zraka le-tega vedno sili nazaj v izhodiščno lego). Torej nad ledom konvekcije ni ali pa je morda le šibka.

Kaj pa horizontalna izmenjava z vetrom? Meteorologi horizontalnemu prenosu lastnosti z vetrom ponavadi rečemo advekcija (da poudarimo, da ne gre za konvekcijo v vertikalni smeri – čeprav sta izraza konvekcija in advekcija v resnici sinonima). Tu pa je možno, da nad led veter ali sapica prinašata iz okolice ali toplejši ali še hladnejši zrak. Toplo advekcijo lahko pričakujemo npr. podnevi iznad okolišnjega kopnega brez ledu, ki je temnejše in se zato od sonca bolj segreje kot led. V takem primeru bi advekcija pomenila lokalno ogrevanje nad ledom. Hladno advekcijo pa bi npr. povzročil mrzel veter, pri nas npr. pozimi od severovzhoda. Kaj bi lahko povzročila advekcija? To, da bi se temperatura zraka na vrhu laminarne mejne plasti spremenila. S tem se tukaj ne ukvarjamo: T_z smo mi (pa tudi Strnad) privzeli kot eno od vhodnih konstant, »konstantni robni pogoj«.

In turbulenca? Turbulentni vrtinci so 3D-izotropno neurejeno gibanje sem in tja – torej tudi neurejena dviganja in spuščanja zraka. Turbulenco v ozračju vsako striženje vetra (pri tleh je to predvsem sprememba hitrosti u z višino $\partial u/\partial z$) pospešuje. Stabilnost turbulenco duši: ker so v stabilnem zraku vertikalna gibanja dušena in zato zrak ne more gor-dol, se zaradi 3D-izotropnosti v stabilni zračni plasti ne more premikati in mešati niti horizontalno. V stabilnem ozračju torej turbulence ni ali pa je le zelo šibka. Labilnost pa turbulenco pospešuje. Razmerje med pospeševanjem zaradi vetrovnega striženja in med dušenjem/pospeševanjem podaja brezdimenzijsko Richardsonovo število $Ri = \frac{g}{T}\frac{\partial T}{\partial z}/\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$. (Točneje: ne T, ampak potencialna temperatura Θ, ki bi jo imel zrak, če bi ga adiabatno stisnili na tlak 1000 hPa; pri tleh pa razlika med njima ni pomembna). Pa še tole: kvadrat pri spremembi hitrosti z višino $\partial u/\partial z$ pove, da je vseeno, ali z višino hitrost narašča – kot je po navadi pri tleh, ali pa pada – kot je npr. pri turbulenci v višinah nad jet-streamom.

Kriterij za turbulenco v zraku v naravi torej ni Reynoldsovo število Re (to je v ozračju predvsem zaradi nizke viskoznosti zraka povsem neuporaben kriterij), ampak je to ali Richardsonovo število Ri ali pa parameter stabilnosti ζ po Moninu in Obuhovu. Močno negativna Richardsonova števila pomenijo močno turbulenco, pri vrednosti okrog $Ri \approx 0{,}25$ pa turbulenca že zamre in je pri še večjih Ri v ozračju ni. Veliko se uporablja tudi kriterij ζ po Moninu in Obuhovu, ki sta na osnovi eksperimentalnih podatkov (glej npr. [1]) teoretično potrdila podobnosti med vertikalnimi turbulentnimi prenosi toplote, vlage, gibalne količine – če jih ustrezno normiramo s parametrom ζ. Povezave med ζ in Ri so empirično določene.

Nekaj primerov vertikalnih turbulentnih prenosov: ker ob vetru močneje piha višje nad tlemi kot pri tleh, turbulentno mešanje prenaša gibalno količino navzdol. Podnevi so po navadi tla topla in iz njih izhlapeva voda – turbulenca tedaj nosi toploto in vlago (z njo pa tudi latentno toploto) nav-



Slika 4. Upoštevanje prevajanja, sevanja in sublimacije. Debelejša neprekinjena krivulja (gostota energijskega toka skozi led) in debelejša prekinjena krivulja (vsota gostot tokov s prevajanjem, sevanjem in sublimacijo) od površine ledu navzgor) se sekata pri temperaturi 263,5 K = −9,7 °C, torej zelo blizu temperaturi zraka na vrhu mejne plasti.

zgor. Ponoči je večinoma pri tleh hladno, pojavi se temperaturna inverzija in turbulenca zamre: četudi v višini morda piha, prenosa gibalne količine navzdol ni in zamre tudi veter pri tleh.

Opisi vertikalnih prenosov s turbulentno difuzijo so zapleteni (kot vse v zvezi s turbulenco). Za vertikalni turbulentni prenos vodne pare npr. velja za $j_{vert,turb} = -\alpha_v \frac{ku_* z}{\Phi_v(\zeta)} \frac{\partial \rho_v}{\partial z}$. Tu so α_v turbulentna analogija Schmidtovemu številu, u_* je Prandtlova torna hitrost (to so povezave – statistične korelacije – med turbulentnimi fluktuacijami horizontalne hitrosti u' in fluktuacijami vertikalne hitrosti w' : $u_* = \sqrt{-\overline{u'w'}}$), k je von Kármánova konstanta in $\Phi_v(\zeta)$ funkcija, ki opisuje, da je v stabilni atmosferi turbulentni prenos šibkejši, v labilni pa močnejši. Torej je obravnava turbulence zapletena reč. Ampak – res smo se že preveč oddaljili od naše teme – temperature površine plavajočega ledu.

Sklep

Za razlago zgolj tega, zakaj je pod ledom v jezerih in mirnejših rekah voda v tekočem stanju, resda zadošča zgolj obravnava prevajanja toplote iz globin skozi led in naprej skozi mejno plast v zrak nad ledom. Za obravnavo temperature površine ledu pa je skoraj nujno upoštevati vsaj še vpliva sevanja in prehajanja vodne pare iz ledu v zrak nad njim, ki sta pomembna tudi ob brezvetrju.

Na koncu ocenimo še temperaturo zaradi skupnega vpliva prevajanja skozi laminarno mejno plast, sevanja in sublimacije – slika 4 (ne upoštevamo pa konvekcije, advekcije in turbulence).

Led ima torej ob privzetih pogojih skoraj enako temperaturo kot zrak na tej višini in prevajanje toplote skoznjo v tem primeru ne prenaša skoraj nič toplote navzgor. Še malo bolj suh zrak – pa bi bila temperatura ledu nižja od temperature ob vrhu mejne plasti – tedaj bi bilo prevajanje navzdol.

Vplivov morebitne konvekcije (in advekcije) ter turbulence kvantitativno nismo vključili, ampak smo jih opisali samo kvalitativno. Zanemarili smo tudi sončno obsevanje, kajti led je precej bel.

LITERATURA

[1] J. A. Businger, J. C. Wyngaard, Y. Izumi in E. F. Bradley, *Flux Profile Relationships in the Atmospheric Surface Layer*, J. Atmos. Sci. **28** (1971), 181–189.

[2] J. Stefan, *Theorie des Psychrometers (nach Maxwell und Stefan)*, Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie **16** (1981), 177–182.

[3] J. Stefan, *Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien – SAW 98, II a, 1889, 965–983.

[4] J. Stefan, *Versuche über die Verdampfung*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien – SAW, Philosophisch-Historische Klasse, **68** (1873), 385–423.

[5] J. Strnad, *Led in voda*, Presek **19** (1992), 204–208.

[6] J. Strnad, *Stefanova naloga (Stefan's task)*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987), 207–210.

[7] ARSO, dostopno na `www.arso.gov.si/o agenciji/knjižnica/mesečni bilten/`, ogled 6. 12. 2018.

[8] ARSO, dostopno na `meteo.arso.gov.si/met/sl/agromet/data/month/`, ogled 6. 12. 2018.

[9] Bénardova konvekcija, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Bénard_convection`, ogled 6. 12. 2018.

[10] Difuzivnost vodne pare skozi zrak, dostopno na `www.thermopedia.com/content/696/`, ogled 6. 12. 2018.

[11] FAO, dostopno na `www.fao.org/docrep/X0490E/X0490E00.htm`, ogled 6. 12. 2018.

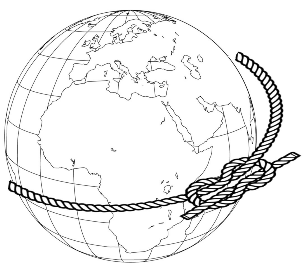
[12] Reynoldsova analogija, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_analogy`, ogled 6. 12. 2018.

ZLOBNI TEST MATEMATIČNE INTUICIJE

Beseda intuicija pomeni neposredno dojemanje, zaznavanje bistva brez razumskega razčlenjevanja (SSKJ). Matematiki jo uporabimo, kadar želimo poudariti, da ima nekdo »nos za rešitev« oziroma neke vrste šesti čut, ki ga vodi v pravilno smer tudi takrat, ko so argumenti še neznani. Skratka, gre za prvino, ki si jo poskuša okrepiti vsak naravoslovec, čeravno ga, obilici treninga navkljub, še vedno lahko pusti na cedilu. Da se to lahko zgodi že pri zelo enostavnih problemih, naj bi razkril naslednji test, pripravljen po vzoru trač revij. Za kvalitetno meritev je bistveno, da se pri nobenem od vprašanj ne ustavite za več kot pol minute. Na koncu število pravilnih odgovorov seštejte in prepričan sem, da mi boste pritrdili, da v matematiki ni »skoraj očitnih« stvari. So le očitne in neočitne!

1. Okoli ekvatorja napeljemo vrv, jo podaljšamo za en meter, nato pa enakomerno odmaknemo od površja Zemlje. Katera je največja žival, ki še lahko zleze pod njo?

   a) miš
   b) mravlja
   c) nič od navedenega



2. Ob šestih zvon bije šestkrat, med prvim in zadnjim udarcem pa je 6 sekund. Ob enajstih bije enajstkrat. Koliko sekund je med prvim in zadnjim udarcem?

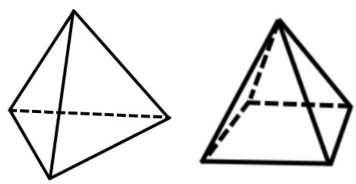
   a) 10
   b) 11
   c) 12

3. Na zabavo pride deset oseb. Tisti, ki se ne poznajo, se rokujejo. Kolikšna je verjetnost, da sta se dve osebi rokovali z enakim številom ljudi?

   a) 100 %
   b) 67 %
   c) 10 %

4. V rokah držimo tetraeder in štiristrano piramido z robovi enake dolžine. Koliko ploskev ima telo, ki ga dobimo, če staknemo dve trikotni ploskvi?

   a) 9
   b) 7
   c) 5



5. Polno zajemalko vode zlijemo v sod vina in tekočino v njem premešamo. Nato zajamemo še polno zajemalko mešanice in jo zlijemo v vrč vode. Česa je več:

   a) vode v sodu
   b) vina v vrču
   c) obojega je enako

6. Na Trojanah po novem opravljajo sekcijsko meritev – voznik dobi kazen, če njegova povprečna hitrost preseže 100 km/h. Prvo polovico odseka prevozimo s hitrostjo 50 km/h. S kakšno povprečno hitrostjo smemo peljati v drugem delu, če ne želimo prejeti kazni?

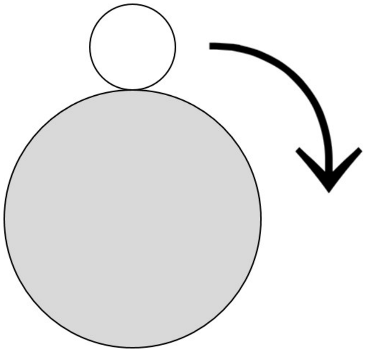
   a) 150 km/h
   b) 220 km/h
   c) kakor hitro želimo

7. Kovanec enotskega polmera zakotalimo okoli drugega s trikrat večjim obsegom. Koliko obratov okoli svoje osi napravi?

a) 3

b) 4

c) 9



8. Po 40. letu se pri 1 % žensk pojavijo maligne tvorbe. Mamografija jih odkrije v 90 %, vendar pa je test pozitiven tudi pri 10 % zdravih žensk. Kolikšna je verjetnost, da je pacientka s pozitivnim testom res bolna?

   a) okoli 8 %

   b) okoli 72 %

   c) natančno 90 %

9. Trije tekači z enakomerno hitrostjo pretečejo 100 metrov. Prvi drugega prehiti za 20 metrov, drugi pa tretjega za prav toliko. Za koliko metrov je prvi tekač prehitel tretjega?

   a) 30

   b) 36

   c) 40

10. Eifflov stolp je visok 321 metrov, zanj pa so porabili 7 milijonov kilogramov jekla. Kako visoka bi bila njegova 1 kilogram težka maketa, narejena iz enakega materiala?

   a) manj kot milimeter

   b) nekaj centimetrov

   c) dober meter in pol

Rešitve

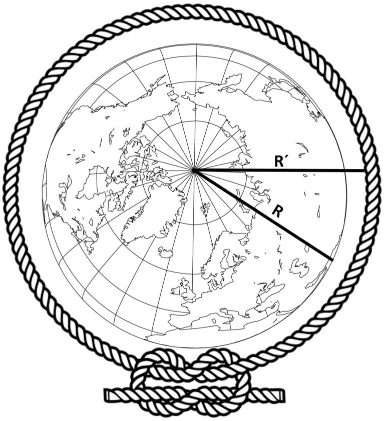
Odgovori: 1 c), 2 a), 3 a), 4c), 5c), 6c), 7b), 8a), 9b), 10c).

Utemeljitve:

1. Intuicijo lahko prevara veliko razmerje med obsegom ekvatorja in podaljškom vrvi, čeprav je odgovor neodvisen od polmera sfere. Res, iz primerjave originalnega in podaljšanega obsega dobimo, da je

$$2\pi R' = 2\pi R + 1\ \mathrm{m} \Longrightarrow R' - R = \frac{1}{2\pi}\ \mathrm{m} \cong 16\ \mathrm{cm}.$$

Dobljena razlika polmerov je enaka oddaljenosti vrvi od površja.

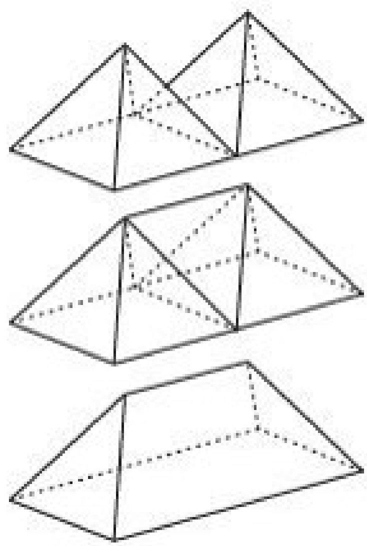


2. Uganka je zelo podobna vprašanju: »Koliko kolov potrebujemo za 11 m ograje, če naj bodo razporejeni na en meter?« Ključno je torej, da ne razmišljamo o številu udarcev, temveč o dolžini intervalov med njimi. Iz podatkov o prvem zvonjenju izvemo, da je med dvema udarcema $\frac{6}{5}$ s. Drugo bitje je sestavljeno iz 10 intervalov, zato traja 12 s.

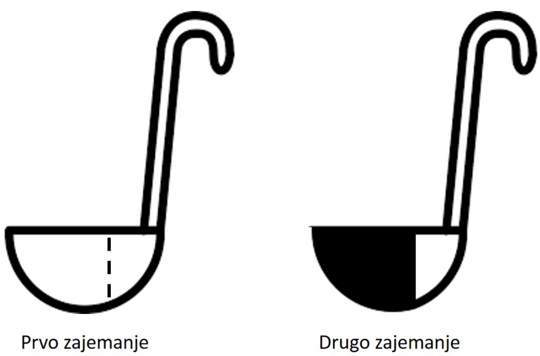
3. Če je na zabavi deset oseb, se lahko vsaka izmed njih načeloma rokuje z 0 do 9 ljudmi. Vendar pa se prva in zadnja možnost ne moreta zgoditi hkrati. Torej se mora vsaj eno število rokovanj zgoditi dvakrat.

4. Naloga izvira iz ameriškega testiranja PSAT 1980, pravilni odgovor pa je bil objavljen šele po protestu 17-letnega Daniela Lowena. Ta je opazil, da se ob staknitvi trikotnih ploskev združita tudi dva para stranskih

ploskev, kar je, vsaj na podlagi skice, precej neočitno. Matematično to najlažje preverimo tako, da staknemo robova osnovnih ploskev dveh kopij štiristrane piramide in povežemo njuna vrhova (glej sliko). Sedaj premislimo, da je dolžina vezne daljice enaka dolžini roba piramide. Telo, ki nastane med piramidama, je torej enako tetraedru.



5. Z odgovorom na to vprašanje imajo še najmanj težav otroci, eksaktno pa rešitev najlažje ilustriramo s sliko. Na njej je (nezmešana) vsebina zajemalke pri drugem zajemanju. Ključen je razmislek, da smo pred tem v sod zlili polno zajemalko vode, sedaj pa nazaj nesemo manjši, s svetlo barvo označen del. To pomeni, da je v sodu ostalo natanko toliko vode, kot je trenutna količina vina v zajemalki.

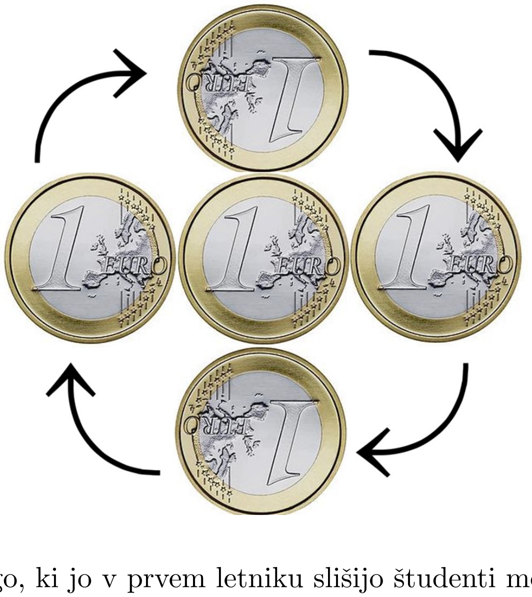


6. Uganka ni po meri cestnoprometnih predpisov, a takšna so dejstva. Če voznik polovico poti s prevozi s polovično hitrostjo $v/2$, je že porabil enako količino časa, kot bi jo za celotno pot pri hitrosti $v = 100$ km/h:

$$t = \frac{s/2}{v/2} = \frac{s}{v}.$$

Vsaka nadaljnja sekunda na poti torej kvečjemu zmanjša njegovo povprečno hitrost.

7. Tudi ta naloga izvira iz ameriškega preverjanja, SAT 1982. Zmeda je bila tokrat še večja, saj pravilni odgovor sploh ni bil ponujen v obkrožanje. Najboljši način za preverjanje rešitve je empiričen, potrdi pa, da je na splošno število obratov enako seštevku obeh radijev. Manjši kovanec namreč, poleg obratov, ki izvirajo iz razmerja v obsegih, naredi še en dodaten obrat zaradi kroženja okoli osi celotnega vrtenja. Kakorkoli, če še vedno niste prepričani in imate težave z iskanjem kovancev ustrezne oblike, lahko preizkus izvedete tudi z dvema kovancema enake oblike (na sliki).

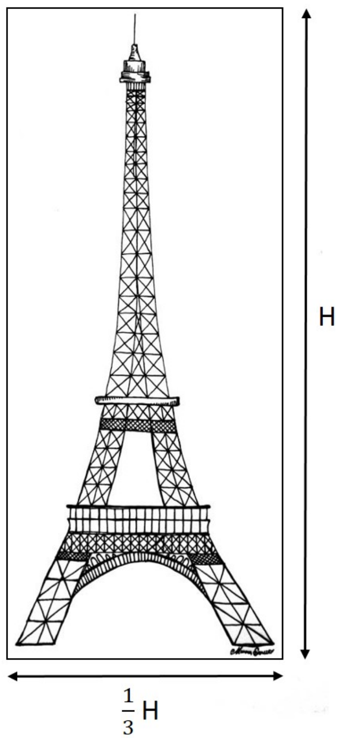


8. Gre za nalogo, ki jo v prvem letniku slišijo študenti medicine. Opozori jih na to, da morajo biti pri interpretaciji testiranj previdni. Oglejmo si primer 1000 pacientk. Zares bolnih je 10, zdravih pa 990. Skupno dobimo torej 108 pozitivnih testov, med katerimi pa je kar 99 lažnih. Ustrezno razmerje je torej enako $\frac{9}{108} \approx 8$ %.

9. Ključen je razmislek, da ob prihodu prvega tekača v cilj razdalja med drugim in tretjim tekačem še ni enaka 20 m. Tolikšna bo šele, ko bo v cilj prišel tudi drugi tekač. Ker pa zaradi enakomernih hitrosti enakomerno narašča, je v opazovanem trenutku enaka štirim petinam končne vrednosti – drugi tekač se namreč nahaja na štirih petinah svoje poti.

10. Stolp je tridimenzionalni objekt, zato je njegova masa sorazmerna s kubom njegove višine H. Za ilustracijo, upoštevajoč dejansko obliko stolpa bi zanj potrebovali pravokotno škatlo višine H, širina in dolžina pa bi morali znašati približno $\frac{1}{3}H$. Volumen te škatle $V = \frac{1}{9}H^3$ je torej sorazmeren s 7 milijoni kilogrami, kar pomeni, da bi morala višina kilogramske makete znašati

$$h = \frac{H}{\sqrt[3]{7 \cdot 10^6}} \approx 1{,}68 \text{ m.}$$



Uroš Kuzman

Zoisove nagrade in priznanja ter Puhove nagrade in priznanja 2018

V Ljubljani so bile 27. novembra podeljene Zoisove nagrade in priznanja, priznanje Ambasador znanosti ter Puhovo priznanje in nagrada za leto 2018. Prejemniki so: Bogdan Povh, ambasador znanosti RS; Leon Kralj, Puhovo priznanje; Mojca Benčina, Saša Prelovšek Komelj, Janez Košmrlj, Andreja Kutnar, Tadej Rojac in Nina Gunde Cimerman, Zoisovo priznanje za pomembne dosežke; Marjan Pipenbaher, Puhova nagrada; Robert Dominko, Matjaž Perc in Marko Noč, Zoisova nagrada za vrhunske dosežke; Franc Vodopivec, Puhova nagrada za življenjsko delo ter Milica Kacin Wohinz in Boštjan Žekš, Zoisova nagrada za življenjsko delo.

Med prejemniki sta tudi člana našega društva: akad. prof. dr. Boštjan Žekš in prof. dr. Saša Prelovšek Komelj.

Vsem nagrajencem iskreno čestitamo za uspeh in priznanje.

Dosežki nagrajencev so opisani na straneh Ministrstva za izobraževanje, znanost in šport [1]. Povzemimo dosežke naših članov.

Zoisovo nagrado za življenjsko delo na področju teorijske fizike je prejel akad. prof. dr. Boštjan Žekš.

Slika 1. Vir: Urad Vlade RS za Slovence v zamejstvu in po svetu.

Boštjan Žekš je bil raziskovalec na Odseku za teoretično fiziko Instituta Jožef Stefan, profesor biofizike na Medicinski fakulteti Univerze v Ljubljani ter profesor in dekan na Univerzi v Novi Gorici. Je član Slovenske akademije znanosti in umetnosti, na kateri je opravljal tudi funkcijo tajnika razreda za matematične, fizikalne, kemijske in tehniške vede in bil predsednik akademije.

Raziskovalno je delal na področjih feroelektričnih kristalov, predvsem tistih z vodikovimi vezmi, tekočih kristalov in feroelektričnih tekočih kristalov ter biofizike bioloških in modelnih fosfolipidnih membran. Na vseh treh področjih, ki med seboj niso povezana, je veliko prispeval k napredku znanosti, obiskoval svetovne centre ter imel predavanja in uvodna predavanja na največjih mednarodnih konferencah. V intenzivnem obdobju svojega znanstvenega delovanja je objavil 214 del v uglednih mednarodnih revijah ter tri monografije. Njegova dela obsegajo okoli 6.500 citatov.

Akademika Boštjana Žekša njegovi raziskovalni dosežki uvrščajo med enega od naših najbolj eminentnih fizikov.

Zoisovo priznanje za pomembne dosežke na področju teoretične fizike osnovnih delcev je prejela prof. dr. Saša Prelovšek Komelj.

Slika 2. Vir: osebni arhiv.

Prof. dr. Prelovšek Komelj je veliko prispevala k razumevanju fizike kvarkov in hadronov, ki so sestavljeni iz njih. V Sloveniji je prva vpeljala izračune kvantne kromodinamike na mreži – to je edini teoretični pristop za študij močne sile v hadronih ab-initio. Proučuje hadronska stanja, ki razpadajo prek močne interakcije. S sodelavci iz Avstrije in Kanade je kot prva teoretično potrdila obstoj takih stanj, ki vsebujejo kvark s ali c. Kot prva je s sodelavci proučila tudi interakcije med nekaterimi pari hadronov, kjer se tvorijo nenavadna štirikvarkovska stanja. Saša Prelovšek Komelj je zaposlena na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, na Institutu Jožef Stefan in na Univerzi v Regensburgu. Za krajši ali daljši čas je gostovala na številnih svetovnih univerzah. Je soavtorica ali edina avtorica 47 izvirnih znanstvenih člankov v uglednih revijah z več kot 2.400 citati. Svoje delo je predstavila v vrsti vabljenih in plenarnih predavanj na uglednih konferencah po svetu in uspešno utira raziskovalno pot v okviru niza mednarodnih projektov.

LITERATURA

[1] www.mizs.gov.si/si/delovna_podrocja/direktorat_za_znanost/sektor_za_znanost/dejavnost/nagrade_in_priznanja_za_izjemne_dosezke_v_znanstveno_raziskovalni_in_razvojni_dejavnosti/2018/, ogled 4. 12. 2018.

Aleš Mohorič

In memoriam: Ciril Velkovrh (1935–2017)

V petek, 22. decembra 2017, smo se na ljubljanskih Žalah poslovili od Cirila Velkovrha, ki je bil skoraj trideset let pomemben sodelavec Odseka za matematiko na tedanji Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani.

Ciril se je rodil 24. julija 1935 na Vrhovcih pri Ljubljani. Končal je viško gimnazijo in doštudiral matematiko na ljubljanski univerzi. V mladosti je bil ljubiteljski športnik in dolga leta navdušen planinec (za 50-letno neprekinjeno članstvo je bil npr. leta 2001 nagrajen z zlatim častnim znakom PD Ljubljana Matica). Kot profesor je po diplomi leta 1959 tri leta poučeval matematiko na Ekonomski srednji šoli v Trbovljah, v začetku šestdesetih let pa je bil povabljen v Ljubljano na Odsek za matematiko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, da bi pomagal vzpostaviti in urediti knjižnico. Skoraj petindvajset let je potem knjižnico vzorno vodil in vzdrževal, po njegovi zaslugi je že v 70. letih prejšnjega stoletja, torej še pred računalniško dobo, postala moderna študijska in raziskovalna ustanova, v pomoč uporabnikom tako pri raziskovalnem kot pri pedagoškem delu.

Nekaj let je bil tajnik Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Pripravljal je redne občne zbore ter pisal poročila o delu društva. Ves čas je tudi sodeloval pri različnih društvenih akcijah in prireditvah, urejanju Vegove in Plemljeve spominske sobe ipd. Vse do svoje predčasne upokojitve leta 1992 pa se je poleg knjižnice ukvarjal zlasti z založniško in izdajateljsko dejavnostjo, ki je po njegovi zaslugi doživela pravi razcvet. Od leta 1970 dalje je bil namreč urednik in tajnik, v resnici pa dejanski operativni vodja komisije za tisk. Sodeloval je pri izdajanju matematičnih in fizikalnih publikacij: pri knjigah in učbenikih, ki so izhajali v različnih zbirkah, pri revijah *Obzornik za matematiko in fiziko* ter *Presek*, pripravljal je večletna kazala, zbiral in objavljal bibliografske podatke o znanih matematikih in fizikih, urejal občasne izdaje itd. Nase je prevzel breme tehnične priprave vsake nove publikacije, od izbire slikovnega gradiva, dodatnih tekstov, preloma strani do koordinacije med avtorji, uredniki, recenzenti, lektorji, oblikovalci in drugimi sodelavci, od sestavljanja avtorskih pogodb, stikov s tiskarnami, do distribucije in prodaje. Skratka, skrbel je za vse nujne uredniške posle, razen strogo strokovnih vsebin, za katere so bili odgovorni posamezni uredniki. Večkrat pa je celo sam poiskal avtorje in jih potem priganjal, da so pravočasno končali z delom. Založbi je tudi v težkih časih inflacije znal priskrbeti potrebna sredstva, tako da je poslovala celo z dobičkom. Število bibliografskih enot, pri katerih je sodeloval in imel pri njih pomemben delež, gre v stotine. Za uspešno društveno delo je prejel več društvenih priznanj (npr. ob 25. obletnici delovanja Zveze društev matematikov, fizikov in astronomov Jugoslavije, ob 30. in 40. obletnici delovanja društva ter ob 10. obletnici izhajanja *Preseka*) in državnih odlikovanj (Red dela z zlatim vencem leta 1974, Red republike z bronastim vencem leta 1989). Na žalost pa je v začetku devetdesetih let prišlo med njim ter vodstvoma odseka in društva do resnega nesporazuma glede vodenja komisije. Moral je zapustiti to delovno mesto, kar ga je močno prizadelo.

Še nekaj let je nadaljeval s podobnim delom, in sicer je v okviru Planinske zveze Slovenije sodeloval pri izdajanju planinske literature, potem pa si je našel novo področje delovanja. V zadnjih dvajsetih letih svojega življenja se je namreč Ciril kot upokojenec sicer ljubiteljsko, a vendar zelo resno posvečal fotografiji. Dvakrat je prehodil slovensko planinsko pot in ob njej v objektiv ujel vse kapelice, križe in druga verska znamenja, ob tem pa še številne druge naravne znamenitosti, gorsko cvetje ipd., da njegovih panoramskih posnetkov naših gora sploh ne omenjamo. Pozneje se je enako intenzivno fotografsko ukvarjal s cerkvami, starimi hišami in šolskimi stavbami po različnih krajih naše domovine. Svoje fotografije je predstavil javnosti v velikem formatu in na razglednicah na več kot 650 razstavah po Sloveniji, v zamejstvu in v tujini. Priložnostne govore, ki so jih ob odprtju teh razstav imeli uveljavljeni slovenski umetnostni kritiki in drugi izobraženci, pa je zbral ter jih skupaj s svojimi spomini na prehojeno pot in izbranimi posnetki objavil v več zanimivih knjigah. S svojimi fotografijami je opremil tudi vsaj deset velikih stenskih koledarjev, večinoma takih s planinsko tematiko. Veliko mu je pomenilo, ko je leta 2013 za svojo promocijo slovenskega planinstva s fotografijami, knjigami, razglednicami in koledarji prejel Zlati častni znak Planinske zveze Slovenije.

Na svoji življenjski poti bibliotekarja, urednika in fotografa je srečeval številne zanimive ljudi in skoraj z vsakim je znal vzpostaviti pristen kontakt in produktivne odnose. Bil je sicer zelo zahteven sogovornik, vztrajen in dosleden, a vendar pravičen in dobronameren. Znal je prepričati druge, da so sprejeli njegovo zamisel, čeprav se sprva morda niso strinjali z njo. Vedno je ravnal tako, kot je mislil, da je prav. Bil je človek neizmerne energije, zgled delavnosti in vztrajnosti. Delal je tako rekoč do zadnjega diha. Zadnjih osem let se je pogumno boril z zahrbtno boleznijo; uteho je našel v svoji družini in v delu. Svoje bogato in polno življenje je sklenil v petek, 15. decembra 2017, dopoldne. Prijatelji bomo pogrešali njegovo živo besedo, njegovo vedrino in humor, kakor tudi njegove fotografske razstave in kulturna srečanja, ki jih je organiziral ob odprtju svojih razstav.

Milan Hladnik

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2018
Letnik 65, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: V ledeni kocki so ujeti mehurčki zraka. Mehurčki nastanejo med zmrzovanjem, ker je v vodi raztopljen zrak. Z ohlajanjem se zmanjša topnost zraka v vodi in zrak zapušča raztopino. Če želimo narediti led brez mehurčkov, uporabimo prekuhano vodo ali pa jo počasi ohlajamo od spodaj, tako da zrak lahko uhaja skozi zgornjo, tekočo plast (glej članek na straneh 138–150). Foto: Aleš Mohorič