

Atwoodov škripec

Aleš Mohorič, Univerza v Ljubljani

fizikalni članek, Presek 52, 5

2025

Zgodovinski ozadje in uvod

- George Atwood, 1784
- Zasnovan za eksperimentalno preverjanje Newtonovih zakonov



https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Diagrams/Atwood_machine.jpeg

- Galileo Galilei
- ~1600



Sestavni deli in postavitvev

- dve uteži (m_1 in m_2)
- lahka, neraztegljiva vrv
- škripec zanemarljive mase in trenja

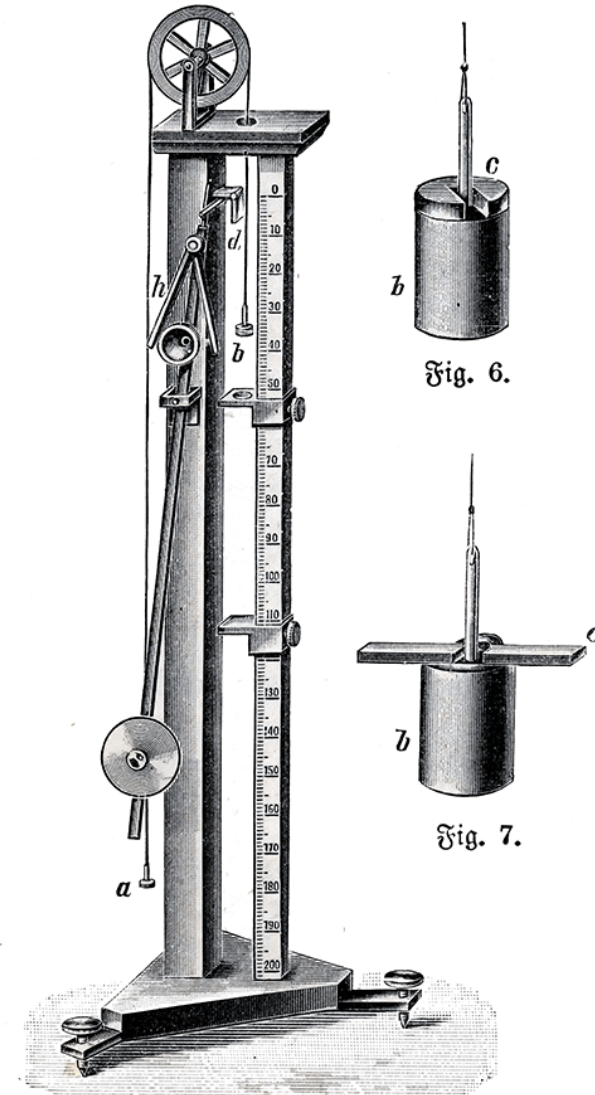
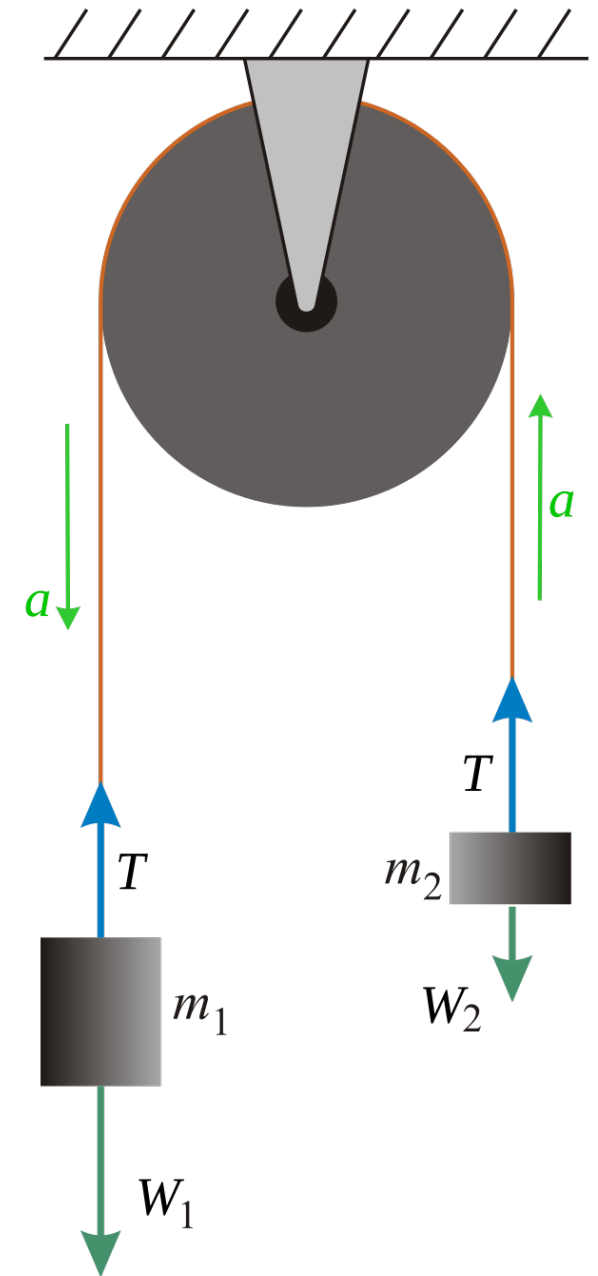


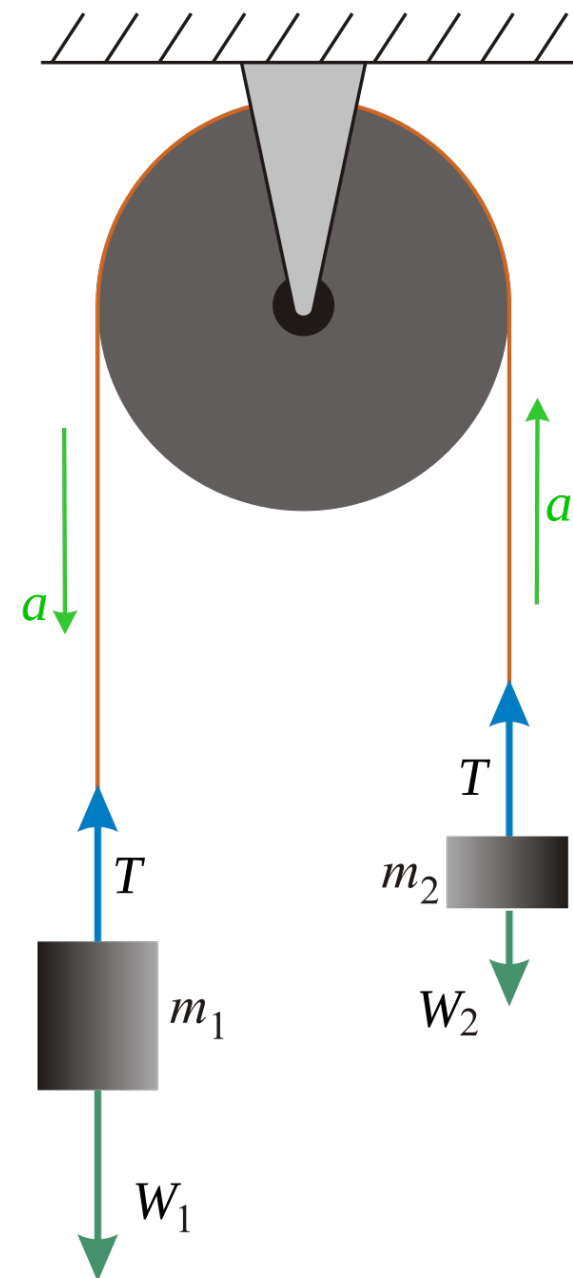
Fig. 5.
Atwood'sche Fallmaschine

Newtonovi zakoni in diagrami sil

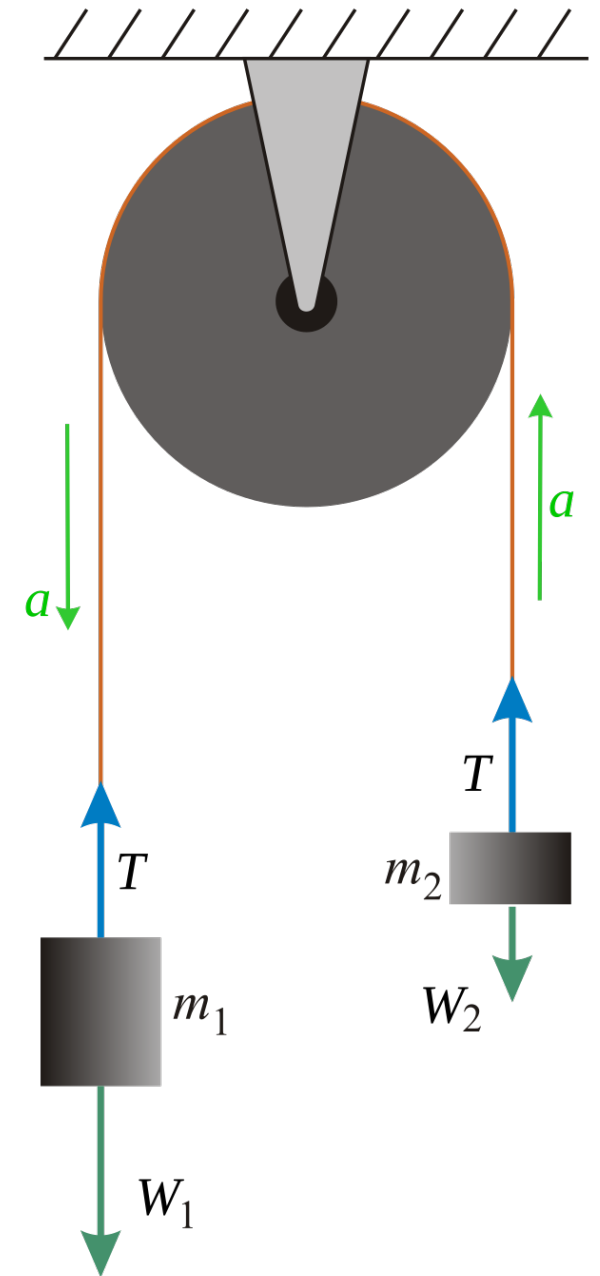
- drugi Newtonov: $F = m a$
- Elementi diagrama sil za vsako utež:
 - m_1 :
 - Teža ($m_1 g$) deluje navzdol,
 - napetost (T) deluje navzgor
 - m_2 :
 - Napetost (T) deluje navzgor,
 - teža ($m_2 g$) deluje navzdol



Newtonovi zakoni in diagrami sil



napetost vrvice 😊



Izpeljava enačb

- Za m_1 :
 - $m_1g - T = m_1a$
- Za m_2 :
 - $T - m_2g = m_2a$
- Združevanje za odpravo napetosti:
 - Seštejmo enačbi: $(m_1g - T) + (T - m_2g) = m_1a + m_2a \rightarrow (m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a$
- Rešitev za pospešek:
 - $a = (m_1 - m_2)g / (m_1 + m_2)$
- Vstavljanje za iskanje napetosti:
 - $T = m_2 (g + a)$ oz. uporabimo enačbo za drugo utež

Lagrangeov formalizem

- generalizirane koordinate
- fazni prostor
- Lagrangeova funkcija $L = T - V$

- načelo stacionarne akcije

- akcija sistema

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt$$

- je v stacionarni točki

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Euler-Lagrangeova enačba

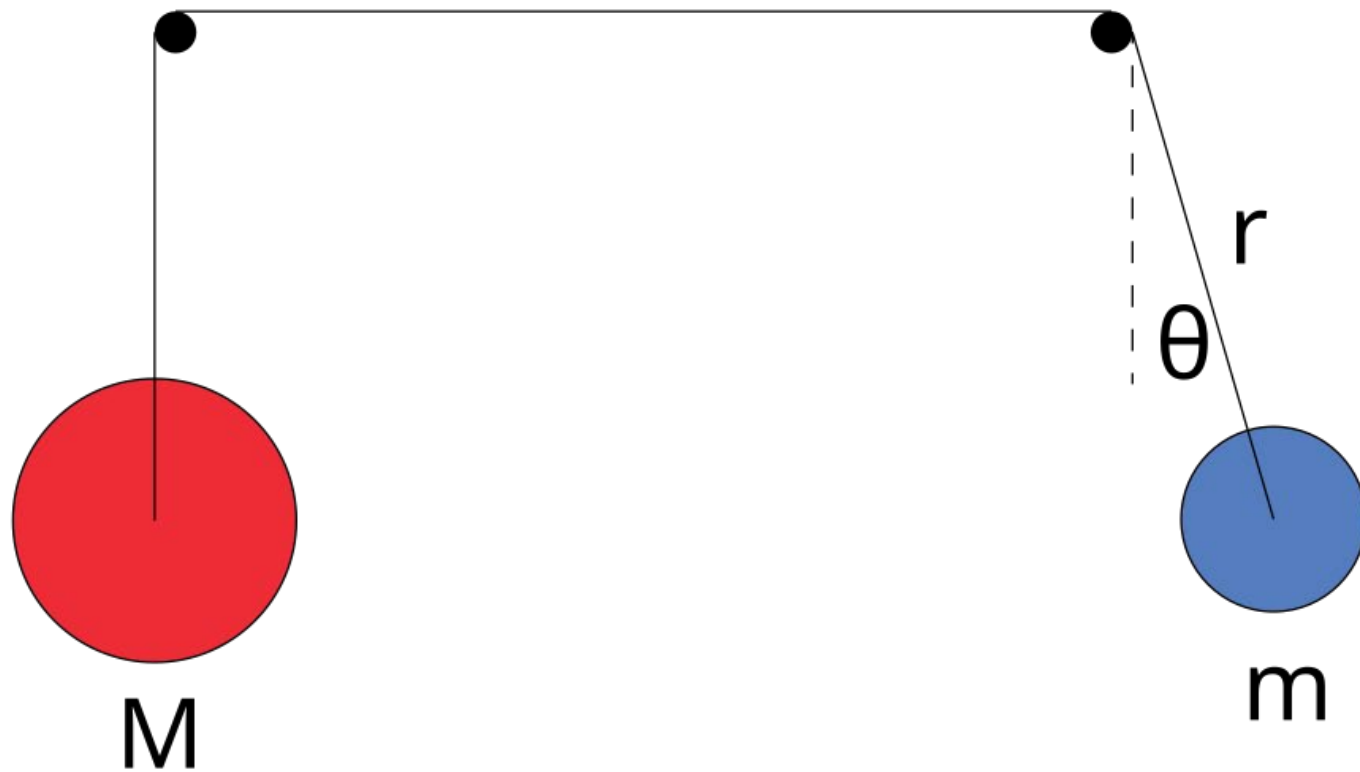
Atwoodov škripec - Lagrangeov formalizem

- generalizirane koordinate x
- fazni prostor $q = x, \dot{q} = \dot{x}$
- Lagrangeova funkcija
- $L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 - m_2gx - m_1g(l - x)$
- Lagrangeova enačba
- $\frac{d}{dt}((m_1 + m_2)\dot{x}) = (m_1 - m_2)g$

demonstracije/simulacije

<https://demonstrations.wolfram.com/AtwoodsMachine/>

Atwoodovo nihalo



Atwoodovo nihalo - Lagrangeov formalizem

- generalizirane koordinate r, θ
- Lagrangeova funkcija

$$L = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - Mgr + mgr \cos \theta$$

- Lagrangeove enačbe ($\mu = M/m$):
- $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0$
- $(\mu + 1)\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g(\mu - \cos \theta) = 0$



nesingularne orbite



μ

=

2

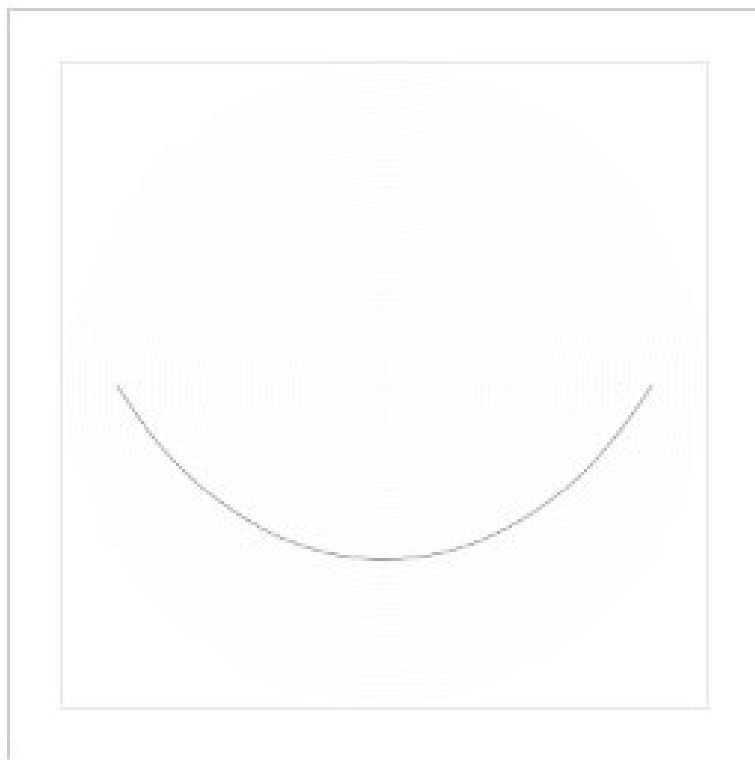


3

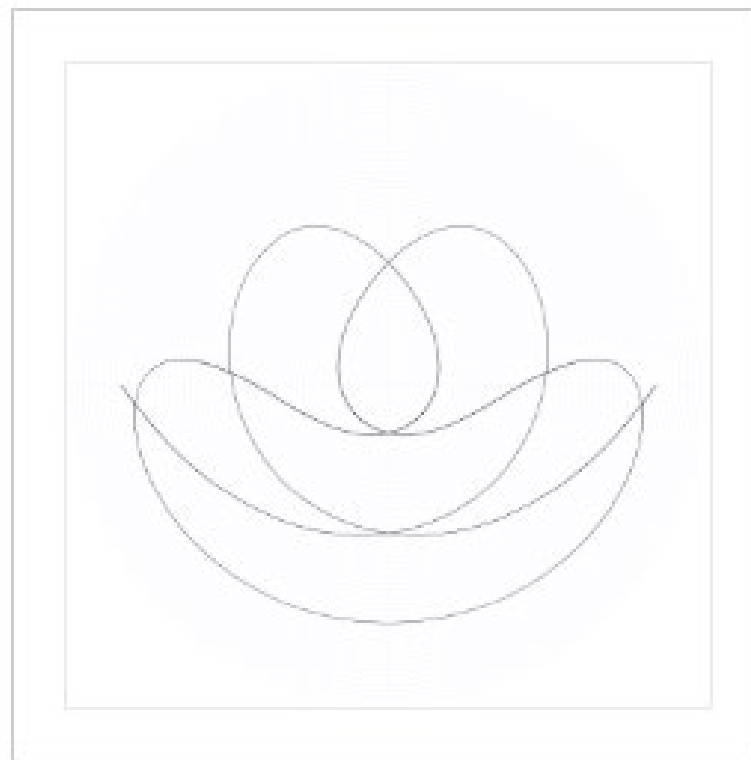


5

periodične orbite



$\mu = 1,66$



2,394

demonstracije/simulacije

<https://demonstrations.wolfram.com/SwingingAtwoodsMachine/>

atw.htm



atw.html (Command Line)



atw.html