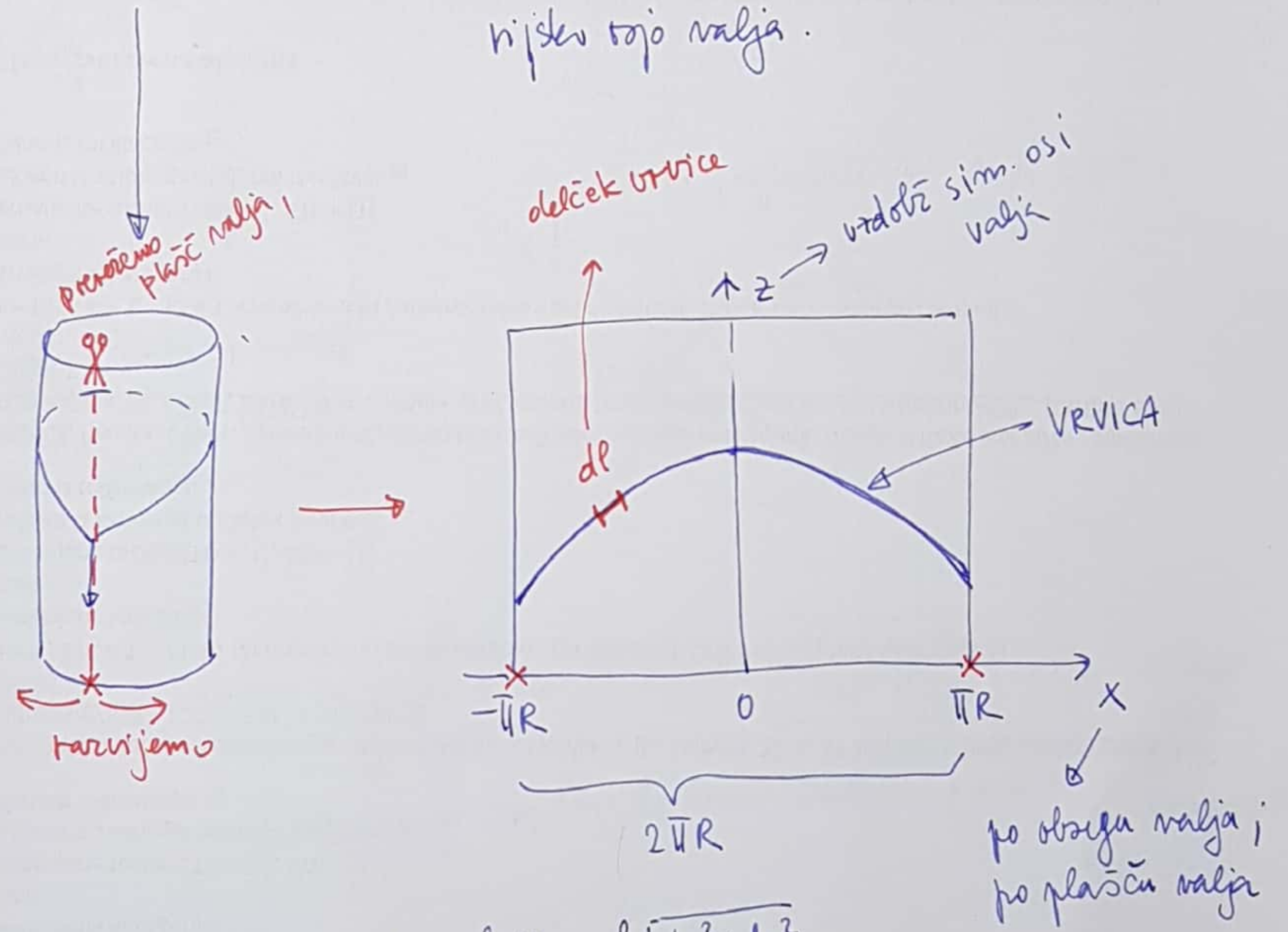
Mejni primer:

1.) Na vsak delček vrvice deluje največja možna sila lepenja:

$$F_e \le k \cdot F_\perp \to F_e = k \cdot F_\perp$$

2.) Na vsak delček vrvice deluje ta sila lepenja v SMERI navpično navzgor (oziroma v smeri, ki je nasprotna sili $\vec{F}_0$, s katero vlečemo zanko vzporedno z simetrijsko osjo valja.

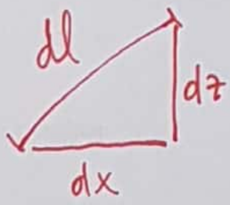


$\Rightarrow$ DOLŽINA VRVICE $L = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + dz^2}$

$$= 2\int_0^{\pi R} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

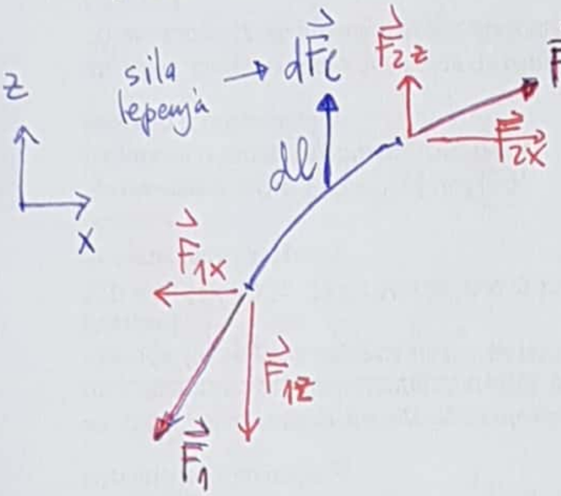
$\downarrow$

iščemo obliko $z(x)$...



Obliko $z(x)$ bomo dobili kot rešitev diferencialne enačbe, s katero bomo zapisali pogoj za ravnovesje delčka vrvice.

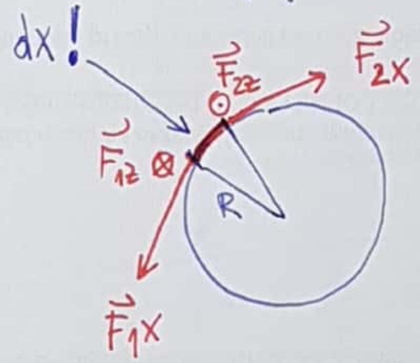
SILE na delček vrvice dl:



$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ → sili, ki delujeta na krajišči dela vrvice dl. Ležita vsaka v svoji tangentni ravnini → tangentni na PLAŠČ valja; tu pa sta prikazani, kot bi plašč razvili v ravnini

↓

Če bi pogledali na valj z vrha:



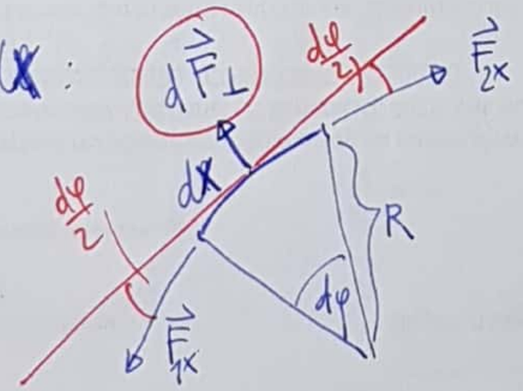
A) Ravnovesje sil v x-smeri (po obsegu valja)

Vrvice ne vleče v levo ali desno; $\boxed{|\vec{F}_{1x}| = |\vec{F}_{2x}|} = F_x$ (velikost sile od x-komponente)

↓

(sila lepenja naj ima le smer vzdolž z osi)

⇒ SILE NA dx:



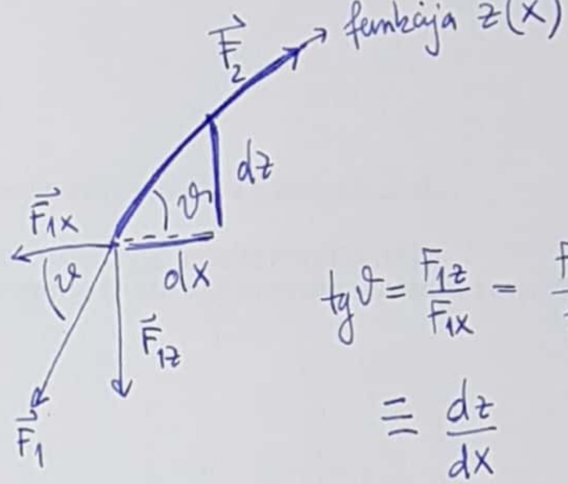
$$\vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + d\vec{F}_\perp = 0$$

$$dF_\perp = 2 \cdot F_x \cdot \sin\frac{d\varphi}{2}$$

$$\boxed{dF_\perp = F_x \cdot d\varphi} = F_x \cdot \frac{dx}{R}$$

$$dx = R \cdot d\varphi$$

b) Ravnovesje sil v smeri osi z:



$$F_{1z} = F_{2z} + dF_e$$

$$F_{1z} = F_{1x} \cdot tg\,\vartheta$$

$$= F_x \cdot \frac{dz}{dx}\Big|_x$$

$$tg\,\vartheta = \frac{F_{1z}}{F_{1x}} = \frac{F_{1z}}{F_x} = \frac{dz}{dx}$$

$$F_{2z} = F_x \cdot \frac{dz}{dx}\Big|_{x+dx}$$

$$dF_e = k \cdot dF_\perp = k \cdot F_x \cdot \frac{d\cancel{x}}{R} = F_{1z} - F_{2z} = F_x\left[\frac{dz}{dx}\Big|_x - \frac{dz}{dx}\Big|_{x+dx}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dz}{dx}\Big|_{x+dx} - \frac{dz}{dx}\Big|_x}{dx} = \boxed{\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{k}{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z(x) = -\frac{k}{2R}\cdot x^2}$$

(z robnimi pogoji: $z(x=0) = 0$ oz. $z(x = \pm\pi R) = -\frac{k}{2R}\cdot\pi^2R^2$)

Zdaj lahko izračunamo dolžino vrvice: $\frac{dz}{dx} = -\frac{kx}{R}$

$$L = 2\int_0^{\pi R}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx = 2\int_0^{\pi R}\sqrt{1+\left(\frac{kx}{R}\right)^2}\,dx = \frac{2R}{k}\int_0^{k\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

$$\frac{kx}{R} = t$$

$$= \frac{R}{k}\cdot\left[k\pi\sqrt{1+(k\pi)^2} + \operatorname{arcsinh} k\pi\right] =$$

$$= R\pi\sqrt{1+(k\pi)^2} + \frac{R}{k}\operatorname{arcsinh} k\pi$$

Posebni primer

$k \to 0$ (malo oz. nič trenja)

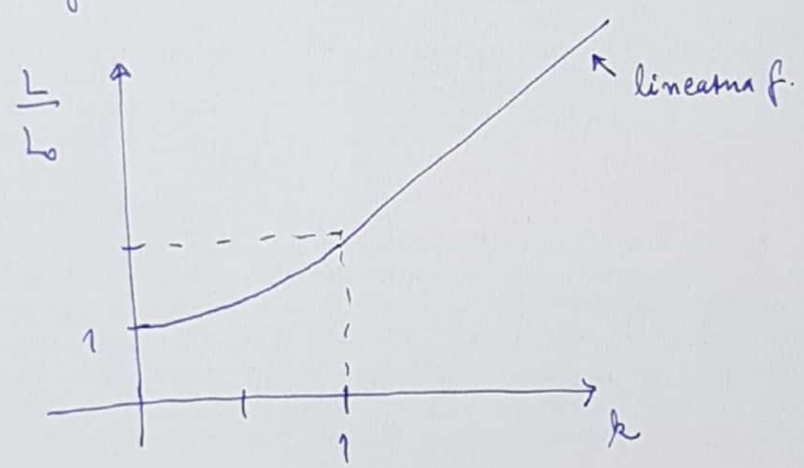
Taylorjev razvoj funkcije $\operatorname{arcsinh} x$ ko $x < 1$

$$\operatorname{arcsinh} x \approx x - \frac{x^3}{6} + \ldots$$

$$L \to R\pi + \frac{R}{k} \cdot k\pi = 2\pi R \quad \text{(obseg valja)}$$

→ čim manjše je trenje, tem bližje je L vrednosti $L_0 = 2\pi R$

Večji k:



Kako k in R vplivata na "strmino" oz nagib vrvice v navpični smeri:

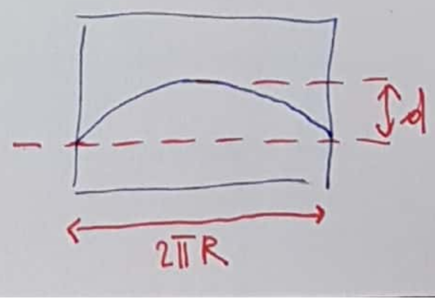
$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{k}{R} \cdot x \Rightarrow \boxed{\text{večji } k \Rightarrow \text{večja strmina}}$$

tudi povprečna

večji R ⇒ manjša strmina

Razdalja med najvišjo in najnižjo točko na vrvici:

$$d = \frac{k}{2R} \cdot \pi^2 \cdot R^2 = \frac{1}{2} k \pi^2 \cdot R$$



"povprečna" strmina: $k_1 = \frac{d}{\pi R} = \frac{1}{2} k\pi$

↳ nanjo vpliva le koef. trenja.