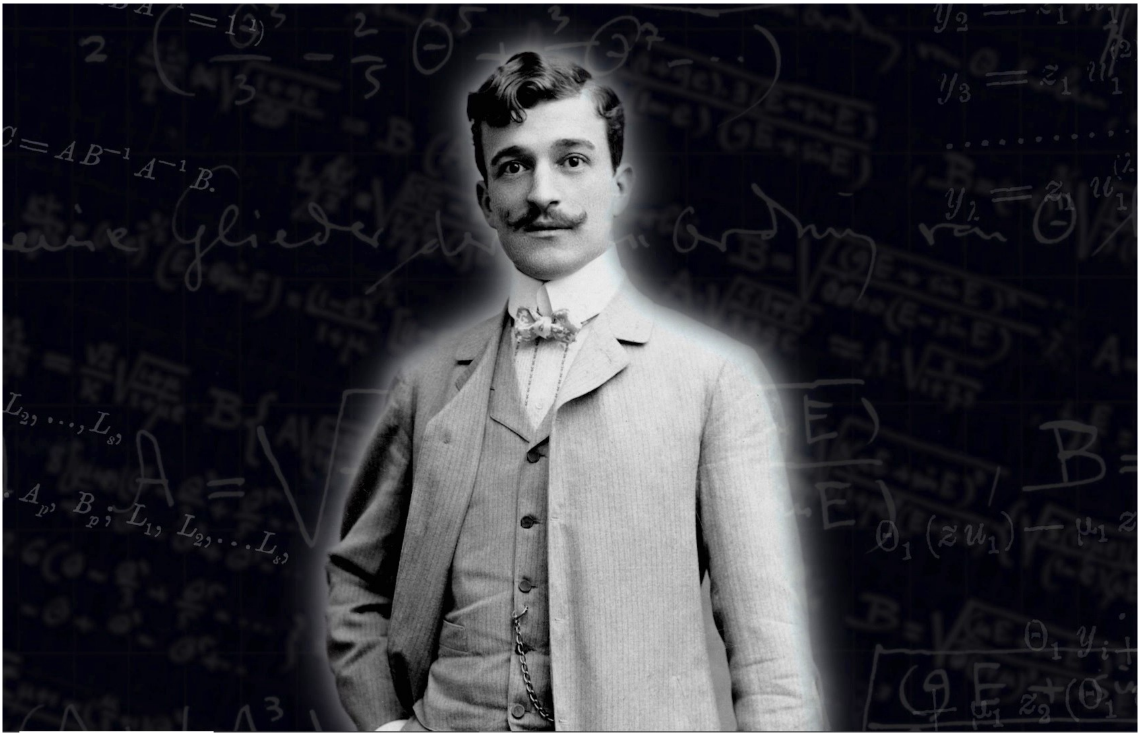
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2024
Letnik 71
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 71 • ŠT. 1 • STR. 1–44 • AVGUST 2024

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JUNIJ 2024, letnik 71, številka 1, strani 1–44

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** `zalozba@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664 **Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASI2X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Konferenca slovenskih matematikov ob 150. obletnici rojstva Josipa Plemlja

Josip Plemelj, rojen 11. decembra 1873 na Bledu, je bil eden izmed največjih slovenskih matematikov do sedaj, začetnik slovenske matematične šole, prvi rektor Univerze v Ljubljani, eden od ustanovnih članov Slovenske akademije znanosti in umetnosti, v svetu izjemno priznan matematik, doma pa poznan številnim generacijam študentov kot izjemen učitelj in mentor. France Križanič je dejal, da so bila Plemljeva predavanja »prava umetnina, matematika v koncertni izvedbi«.

Po maturi v Ljubljani je Plemelj študiral matematiko, fiziko in astronomijo na Dunaju, kjer je leta 1898 doktoriral iz matematike. Po doktoratu je po eno leto preživel v Göttingenu in Berlinu, kjer je spoznal dva od tedaj vodilnih matematikov, Davida Hilberta in Felixa Kleina. Deset let kasneje je postal svetovno znan zaradi svoje rešitve Hilbertovega 21. problema, znanega tudi kot Riemannov problem, ki jo je objavil leta 1908. Pri reševanju tega problema je bistveno uporabil formulo o skoku holomorfne funkcije vzdolž krivulje, ki jo je sam razvil in ki danes nosi ime Plemelj-Sokhotski formula. Ta dva rezultata sta ga uvrstila med elitne svetovne matematike svojega časa, dasiravno je imel kasneje še vrsto drugih pomembnih dosežkov iz kompleksne analize, teorije diferencialnih enačb in potencialne teorije. Plemelj je postal redni profesor matematike na univerzi v Černovicah leta 1908, zatem pa je bil redni profesor na Univerzi v Ljubljani od njene ustanovitve leta 1919 vse do upokojitve 1957. Leta 1949 je postal prvi častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov (DMFA) Slovenije, 1954 je prejel Prešernovo nagrado in 1963 častni doktorat Univerze v Ljubljani. Poleg članstva v SAZU je bil dopisni član jugoslovanske akademije znanosti in umetnosti v Zagrebu ter srbske in bavarske akademije znanosti.

Ob 150. obletnici rojstva akademika Josipa Plemlja je v Festivalni dvorani na Bledu v dneh 15. in 16. septembra 2023 potekala konferenca slovenskih matematikov v organizaciji DMFA. Konferenca je vsebovala plenarni minisimpozij, posvečen Josipu Plemlju, raziskovalni del s predstavitvami znanstvenih prispevkov slovenskih matematikov, ter pedagoški del s predstavitvami učiteljev matematike in fizike. Minisimpozij je s svojo prisotnostjo počastila vrsta uglednih gostov, predstavnikov matematičnih oddelkov različnih fakultet in inštitutov ter akademikov. Slavnostne nagovore so imeli akademik prof. dr. Peter Štih, predsednik SAZU, prof. dr. Gregor Majdič, rektor Univerze v Ljubljani in g. Anton Mežan, župan Bleda. V okviru minisimpozija so predavali dr. Boštjan Kuzman (Prof. Josip Plemelj — življenjska zgodba izjemnega človeka), prof. dr. Milan Hladnik (Profesor Plemelj in reševanje Hilbertovega 21. problema) in dr. Željko Oset (Intelektualna mreža akad. dr. Josipa Plemlja).

Pričujoča števila Obzornika je posvečena temu dogodku. Vljudno vabljeni k branju.

akad. prof. dr. Franc Forstnerič

Nagovor ob 150. obletnici rojstva Josipa Plemlja, Bled, 15. 9. 2023

Spoštovane gospe in spoštovani gospodje, Letos praznujemo 150. obletnico rojstva vodilnega predvojnega slovenskega matematika Josipa Plemlja, blejskega domačina, ki si je že pred prvo svetovno vojno dal tu postaviti svojo hišo, poimenovano Vila Perun. Hiša slavnega matematika je imela prav zanimivo zgodovino, o kateri je pred kratkim pisal Željko Oset. Med drugim jo je kmalu po drugi svetovni vojni uprava za gostinstvo in turizem kategorizirala kot »gostinski obrat Bled – zasebne sobe Plemel«. Nekaj časa so v njej nato v dogovoru s Plemljem, ki vendarle ni želel biti gostinec, počitnikovali člani Slovenske akademije znanosti in umetnosti, od leta 1975 pa je v lasti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, katerega prvi častni član je ob njegovi ustanovitvi leta 1949 postal prav Plemelj, ki ima v hiši tudi spominsko sobo. Enajst let pred ustanovitvijo vašega društva je bila leta 1938 po več kot poldrugem desetletju dolgih prizadevanj ustanovljena Slovenska akademija znanosti in umetnosti oziroma Akademija znanosti in umetnosti v Ljubljani, kot se je takrat uradno imenovala najvišja slovenska znanstvena in umetnostna ustanova, ki zaradi vladajoče državne ideologije integralnega jugoslovanstva in z njo povezanega unitarizma ni smela nositi prilastka slovenska. Josip Plemelj je bil eden od njenih ustanovnih članov. Prav zaradi tega vas danes kot predsednik SAZU tudi nagovarjam. Pomena, ki ga je imel Josip Plemelj za slovensko matematiko in znanost na splošno, v tem krogu ni treba posebej izpostavljati. Zadostuje, da omenim, da je v vabilu za današnjo konferenco označen kot »oče slovenske matematike«.

Profesor Milan Hladnik, ki bo danes o Plemlju govoril s strokovnega stališča, ga je nedolgo tega označil za »največjega in v svetu poleg Jurija Vege najbolj znanega slovenskega klasičnega matematika«, akad. Ivan Vidav, Plemljev najpomembnejši učenec, pa je v nekrologu v Letopisu SAZU ob Plemljevi smrti leta 1967 zapisal, da je bil »matematik svetovnega slovesa«, ki si je »trajen spomenik v matematiki postavil z rešitvijo Riemannovega problema, s katerim so se matematiki zaman ukvarjali petdeset let«. Plemljevo življenje in kariera, o katerih je nekaj malega sam povedal leta 1949 na prvem kongresu jugoslovanskih matematikov, prav tu na Bledu, sta na neki način značilna za slovenske intelektualce njegovega časa. Rojenemu v skromnem kmečko-obrtniškem socialnem okolju, kjer je njegova ovdovela mati le z veliko težavo preživljala družino, je uveljavitev in ugledno kariero univerzitetnega profesorja omogočila le njegova izobrazba. Povezana je bila s Plemljevo izjemno nadarjenostjo za matematiko, ki jo je izkazoval že od prvih let svojega šolanja – in se je je tudi zavedal ter jo kultiviral, saj je imel občutek, »da me je narava usposobila za neko misijo v matematičnem svetu«. Značilno za tisti čas je bilo tudi to, da svojega univerzitetnega študija ni mogel opraviti doma, ampak je moral tako kot številni njegovi rojaki na študij na Dunaj in je sprva tudi služboval daleč od doma; nazadnje kot redni profesor na univerzi v Černovicah v avstro-ogrski Bukovini v današnji Ukrajini. Po prevratu se je kot marsikateri, sprva na tuji univerzi delujoči Slovenec, vrnil v domovino in se aktivno vključil v delo za vzpostavitev slovenske univerze v Ljubljani, kjer je bil že od samega začetka leta 1919 ne le njen redni profesor, ampak tudi njen prvi rektor, s čimer se je trajno zapisal v spomin in zgodovino naše najpomembnejše visokošolske ustanove. Svojega prvega rektorja je ljubljanska univerza ob njegovi 90-letnici leta 1963 počastila s častnim doktoratom. Po svoje je zato paradoksalno, da je bila Plemljeva vrnitev v domovino, kot je v že omenjenem nekrologu zapisal Vidav, »pravzaprav žrtev za njegovo znanstveno kariero. Osamljen v majhnem mestu, kakršna je bila tedaj Ljubljana, brez dobre matematične knjižnice, je praktično nehal z znanstvenim delom in ostal le še učitelj matematike.« Tudi sam Plemelj je na čas pred propadom monarhije gledal kot na svoja najboljša leta. A tudi kot »le še učitelj matematike« je v Ljubljani ustvaril izjemno zapuščino. Ne le zato, ker so bila Plemljeva predavanja po besedah enega njegovih poznih študentov, profesorja Franceta Križaniča, »prava umetnina, matematika v koncertni izvedbi«, kar je še toliko bolj impresivno, ker se nanje ni nikoli pripravljal, ampak je njihovo vsebino sproti koncipiral na poti od svojega ljubljanskega doma v Gradišču do Univerze, temveč nič manj zato, ker je zaradi svojega izjemnega posluha za jezik ustvaril solidne temelje za slovensko matematično terminologijo. Zaradi teh razlogov je Vidav za Plemljev prihod v Ljubljano lahko zapisal, da je bil »neprecenljivega pomena za razvoj matematike in eksaktnih znanosti pri nas«. Plemelj je bil za svoje delo deležen številnih priznanj in časti, tako v tujini kot doma. Tu naj omenim le, da je že leta 1923 postal dopisni član Jugoslovanske (danes Hrvaške) akademije znanosti in umetnosti v Zagrebu, sedem let kasneje ga je za svojega dopisnega člana izvolila tudi Srbska akademija znanosti in leta 1954 še Bavarska akademija znanosti. Doma pa je bil, kot rečeno, član Slovenske akademije znanosti in umetnosti od njene ustanovitve leta 1938. Ljubljanska akademija, ki je predstavljala sklepni kamen v zgradbi slovenske institucionalne kulture, je ob ustanovitvi štela osemnajst ustanovnih članov. Po besedah umetnostnega zgodovinarja Franceta Steleta, ki je postal član SAZU leta 1940, je bila s tem nagrajena generacija, ki je po prevratu ponesla slovensko znanost na novo evropsko raven. V takrat zelo majhnem Matematično-prirodoslovnem razredu sta mu družbo delala samo še matematik Rihard Zupančič in biolog Jovan Hadži. Zanimivo in obenem presenetljivo pri tem je, da se nobeden od omenjene trojice ni udeležil ustanovne skupščine ljubljanske Akademije, ki je potekala 12. novembra 1938 na rektoratu Univerze v Ljubljani. Na splošno se zdi, da se Plemelj v delo Akademije ni najbolje vključil. Udeležil se ni niti prvih volitev novih članov maja 1940, ko je bil poleg elektrotehnika Milana Vidmarja v Matematično-prirodoslovnem razredu za rednega člana izvoljen tudi kemik Maks Samec. Samčeva izvolitev je povzročila veliko krizo v tretjem razredu. Tajnik razreda Jovan Hadži, ki je Samcu zameril, da leta 1935 zaradi njegove protikandidature ni bil izvoljen za rektorja ljubljanske univerze, je odstopil s svoje funkcije, Plemelj pa se je celo odpovedal članstvu. Stanje je bilo očitno tako nevzdržno, da je decembra 1940 kot član Akademije odstopil še Samec in kot razlog navedel »spoznanje, da bode matematično-prirodoslovni razred šele po mojem odstopu mogel priti do uspešnega dela«. Plemelj je nato preklical svoj odstop in predsedstvo mu je znova priznalo članstvo, kar je bil svojevrsten precedens tudi za naprej, saj odstop ni nujno pomenil slovesa od Akademije in ga je bilo mogoče preklicati. Tako je bil tudi Samec, na svojem področju nič manj ugleden in pomemben znanstvenik, kot je bil Plemelj na svojem, leta 1949 znova sprejet med akademike. Osebne zamere so se s časom očitno pomirile. Za konec naj samo še omenim, da je leta 1957 sprejeti zakon o univerzi določal upokojitev profesorjev ob dopolnjenem 70. letu starosti. Plemljevo delo na univerzi se je s tem končalo, ga je pa zato, tako kot njegova razredna kolega Jovana Hadžija in Milana Vidmarja, za nekaj časa zaposlila Akademija. Kot je zapisal Željko Oset v svoji Zgodovini SAZU, je v zakonu mogoče videti tudi simbolni zaključek delovanja tiste uspešne slovenske generacije znanstvenikov, ki je od ustanovitve Univerze v Ljubljani uveljavila temeljne znanstvene standarde in prenesla svoje znanje in izkušnje generacijam študentov. Z besedami Milana Vidmarja so s tem postali njeni pripadniki duhovni očetje generacijam znanstvenikov in izobražencev. Mislim, da nas Josip Plemelj s svojim delom lahko navdihuje še danes, več kot pol stoletja po svoji smrti. Hvala lepa.

akad. prof. dr. Peter Štih, predsednik SAZU

Plemljeva vila na Bledu

PROFESOR PLEMELJ IN REŠEVANJE HILBERTOVEGA 21. PROBLEMA

MILAN HLADNIK[1]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Ključne besede: Math. Subj. Class. (2020): 34M35, 34M50

Bralcu je morda manj znano, da se reševanje Hilbertovega enaindvajsetega problema ni končalo leta 1908 z objavo Plemljeve rešitve, ki je skoraj petinsedemdeset let obveljala za dokončno. Poleg osnovne matematične razlage in Plemljevega pristopa k problemu je v članku, ki se izogne zapletenim dokazom, na kratko opisano nadaljnje raziskovanje, ki je ob koncu 20. stoletja privedlo do presenetljivega preobrata z odkritjem protiprimerov in drugačnih dognanj. Po mnenju avtorja tega prispevka nova spoznanja ne zmanjšujejo pomena Plemljeve pionirske vloge pri reševanju problema.

PROFESSOR PLEMELJ AND SOLVING HILBERT'S 21ST PROBLEM

It may be less known to the reader that the process of solving Hilbert's twenty-first problem did not end in 1908 with the publication of Plemelj's solution which was considered definitive for almost seventy-five years. In addition to the basic mathematical explanation and Plemelj's approach to the problem, the article, which avoids complex proofs, briefly describes further research, which at the end of the 20th century led to a surprising turn with the discovery of counterexamples and different conclusions. In the opinion of the author of this paper, the new findings do not diminish the importance of Plemelj's work and his pioneering role in solving the problem.

Josip Plemelj (1873–1967) je gotovo najbolj znan in v svetu uveljavljen slovenski klasični matematik po Juriju Vegi. V tem sestavku se bomo dotaknili le enega vidika njegovega znanstvenega dela, ki pa mu že sam zase zagotavlja ugledno mesto v zgodovini matematike. Uvršča se namreč med reševalce problema, ki izhaja še iz Riemannovih idej v sredini 19. stoletja, na novo pa ga je formuliral nemški matematik David Hilbert (1862–1943), ko je leta 1900 na drugem svetovnem matematičnem kongresu v Parizu predstavil triindvajset, takrat še nerešenih matematičnih problemov. Med njimi je bil tudi naslednji enaindvajseti problem:

H21. *Dokazati, da obstaja Fuchsova linearna diferencialna enačba z danimi singularnostmi in dano monodromijsko grupo.*

Ker Hilbert v spremljajoči razlagi tega problema omenja Riemanna, ki se je sicer ukvarjal s konstrukcijo analitičnih funkcij s predpisanimi lokalnimi lastnostmi, je problem H21 postal znan kot **Riemannov problem**. Tako ga imenuje tudi Plemelj v svojem članku [17] in v monografiji [18] in za njim še profesor Vidav v svoji knjižici ob stoletnici Plemljevega rojstva [22].

Danes uporabljajo tudi ime **Riemann-Hilbertov problem** (npr. Anosov in Bolibruch v [1]). Sicer pa je dobro vedeti, da se pod tema dvema nazivoma skriva še vrsta drugih problemov, ki vsi izvirajo iz Riemannovih raziskav in se v glavnem tičejo robnih vrednosti analitičnih funkcij (glej npr. ustrezno geslo na Wikipedii in tam navedeno literaturo).

V originalnem Hilbertovem besedilu je namesto Fuchsovega *sistema* navedena zahteva po eksistenci Fuchsove *enačbe* (glej npr. [12]). Današnji vodilni matematiki na tem področju menijo, da je Hilbert z enačbo v resnici mislil vektorsko enačbo oziroma sistem enačb. To utemeljujejo z dejstvom, da je bilo v Hilbertovem času že znano, da ni vedno mogoče konstruirati Fuchsove enačbe višjega reda, ki bi imela (natanko) predpisane singularnosti ter dano monodromijsko grupo. Razlog je premajhno število parametrov v Fuchsovi enačbi v primerjavi s številom parametrov pri monodromiji, kar je prvi izračunal H. Poincaré [19]. Za dosego cilja so potrebne dodatne, t. i. navidezne singularnosti (glej 5. razdelek).

Ta sestavek je zgolj informativnega značaja in se ne spušča v podrobne dokaze sicer zahtevnih trditev, večinoma je povzet po knjigi [1] ter po dveh člankih [3] in [6]. Njegov namen je zgolj povedati zgodbo o reševanju problema H21, ki je zanimiva in poučna, a se zdi med slovenskimi matematiki premalo znana, čeprav je v njej pomembno vlogo odigral tudi profesor Josip Plemelj. Ogledali si bomo, kakšen je bil njegov prispevek v začetku prejšnjega stoletja in do kakšnih novih spoznanj so se raziskovalci dokopali ob njegovem koncu. Najprej pa skušajmo pojasniti, kaj Hilbertov 21. problem sploh pomeni.

1. Osnovni pojmi o Fuchsovih sistemih

Imejmo sistem n homogenih linearnih diferencialnih enačb prvega reda, zapisan v matrični oziroma vektorski obliki

$$y' = A(z)y, \tag{1}$$

kjer je y neznana vektorska funkcija (funkcijski stolpec), y' vektor njenih odvodov in $A(z)$ meromorfna matrična funkcija reda n. To pomeni, da so vsi njeni elementi povsod na $\mathbb{C}$ holomorfne (analitične) funkcije, razen na množici izoliranih točk $\{a_1, a_2, \ldots\}$, v katerih so poli. Te točke so izjemne, imenujemo jih *singularne točke sistema.* Tudi neskončna točka, ∞, je na splošno lahko singularna, kar po definiciji pomeni, da je 0 singularna točka za sistem, ki ga iz prvotnega sistema (1) dobimo s substitucijo $z \mapsto 1/z$. V tem primeru zahtevajmo, da je tudi v točki ∞ pol za vsak element matrične funkcije $A(z)$. Toda iz splošne teorije analitičnih funkcij je znano, da so meromorfne funkcije, ki imajo pole na razširjeni kompleksni ravnini $\tilde{\mathbb{C}} =$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kar racionalne funkcije. Le-te pa imajo na $\tilde{\mathbb{C}}$ le končno mnogo singularnosti (polov) $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Torej je tudi matrična funkcija $A(z)$ iz (1) v resnici racionalna.

Zaradi enostavnosti obravnave bomo odslej še dodatno predpostavili, da neskončna točka ∞ ni singularna oziroma, da ležijo vsi poli v končnosti: $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$; s primerno substitucijo lahko to pri zgornjih privzetkih vedno dosežemo.

Definicija 1. Singularna točka $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je *Fuchsova singularna točka* sistema (1), če ima funkcija $A(z)$ v njej pol kvečjemu prve stopnje. Sistem je *Fuchsov*, če so vse njegove singularne točke Fuchsove.[1]

Hitro vidimo tudi naslednje: Če je sistem (1) Fuchsov in so točke a_i res poli prve stopnje, ima pri prejšnji predpostavki matrična funkcija $A(z)$ obliko

$$A(z) = \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{z - a_i},$$

kjer so A_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, konstantne matrike reda n. Ker smo predpostavili, da ∞ ni singularna točka, pa poleg tega velja tudi $\sum_{i=1}^{s} A_i = 0$. Slednje takoj spoznamo z uporabo substitucije $z = 1/\zeta$, ki nam sistem (1) prevede v sistem $\dot{y} = B(\zeta)y$, kjer je

$$B(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2} A(1/\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \sum_{i=1}^{s} \frac{A_i}{1 - a_i\zeta} = -\frac{1}{\zeta} \sum_{i=1}^{s} A_i - \sum_{1=1}^{s} \frac{a_i A_i}{1 - a_i\zeta}.$$

Vidimo, da je druga vsota vedno regularna funkcija pri $\zeta = 0$, prva, in zato tudi matrična funkcija $B(\zeta)$, pa natanko takrat, ko je $\sum_{i=1}^{s} A_i = 0$.

Sistem (1) in njegove rešitve bomo torej obravnavali na množici $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$.

Eksistenčni izrek za sisteme navadnih linearnih diferencialnih enačb na vsakem enostavno povezanem območju $\Omega \subset U$, ki ne vsebuje singularnih točk, zagotavlja n linearno neodvisnih holomorfnih rešitev danega sistema linearnih diferencialnih enačb. To so funkcije na Ω z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$, opazujemo pa jih lahko tudi na vsej množici U. Singularne točke so lahko tedaj

[1] Poimenovanje izvira iz priimka nemškega matematika Lazarusa Immanuela Fuchsa (1833–1902), ki se je skoraj izključno ukvarjal z linearnimi diferencialnimi enačbami. Plemelj ga je srečal kot profesorja v Berlinu, kjer je bil leta 1899/1900 po svojem doktoratu na študijskem izpopolnjevanju.

tudi njihova razvejišča.

Zgled 1. Sistem $y_1' = y_2/z$, $y_2' = 0$ ima npr. dve singularni točki, $z = 0$ in $z = \infty$, ki sta obe Fuchsovi, in dve linearno neodvisni rešitvi $(1, 0)$ in $(\ln z, 1)$. Druga rešitev ima v obeh singularnih točkah logaritmično razvejišče. Za sistem $y_1' = y_2/z$, $y_2' = y_2/(2z)$ z linearno neodvisnima rešitvama $(1, 0)$ in $(2\sqrt{z} - 2, \sqrt{z})$ pa sta obe singularni točki, $z = 0$ in $z = \infty$, korenski razvejišči. Oba zgleda sta samo posebna primera Eulerjevega sistema (6) v naslednjem razdelku (pri $a = 1$, $b = 0$ in pri $a = 1/2$, $b = 0$).

Rešitve sistema (1) tvorijo n-razsežen vektorski prostor S nad U večličnih holomorfnih funkcij, nad ustrezno Riemannovo ploskvijo (tj. univerzalnim krovnim prostorom nad U) pa enoličnih holomorfnih funkcij, z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$. Kot stolpce jih lahko združimo v t. i. *fundamentalno matriko rešitev* $Y = Y(z)$ sistema (1).

Osnovne rešitve lahko analitično nadaljujemo, začenši v izbrani regularni točki z_0, vzdolž vsake sklenjene poti v U. Ta pot določa element σ *fundamentalne grupe* $\pi_1(U, z_0)$ za U. Isti element določajo vse sklenjene poti, ki so v U homotopne prvotni poti. Ker je območje U s potmi povezano, je fundamentalna grupa $\pi_1(U)$ neodvisna od izbire začetne točke z_0 (primerjaj [15, str. 10, 11]), zato običajno navedbo začetne točke kar izpustimo. Tako bomo storili tudi v nadaljevanju tega prispevka in namesto $\pi_1(U, z_0)$ pisali krajše $\pi_1(U)$.

Analitično nadaljevanje izbranih osnovnih rešitev na vsakem koraku ohranja linearno neodvisnost med njimi. Ko se vrnemo na prvotno območje Ω, so te rešitve še vedno linearno neodvisne, toda morda druge funkcije, ki pa so linearne kombinacije prvotnih. Če je bila $Y = Y(z)$ prvotna fundamentalna matrika sistema (1), naj bo $\sigma(Y)$ nova fundamentalna matrika po obhodu vzdolž sklenjene poti σ (tako da pomeni σ hkrati tudi transformacijo iz ene fundamentalne matrike v drugo, ki je dobljena z analitičnim nadaljevanjem vzdolž poti σ).

Ena od sklenjenih poti v U je trivialna pot, homotopna točki z_0. Ustrezni element fundamentalne grupe $\pi_1(U)$ označimo z ι in predstavlja enoto v $\pi_1(U)$; zanjo velja $\iota(Y) = Y$. Toda sklenjene poti v U oziroma elemente fundamentalne grupe lahko med seboj komponiramo (polovico časa prehodimo po prvi, polovico po drugi poti). Produkt dveh elementov σ in τ v grupi $\pi_1(U)$ označimo s $\sigma\tau$ (najprej σ in nato τ), tako da je ustrezna transformacija fundamentalne matrike Y z analitičnim nadaljevanjem enaka

$$(\sigma\tau)(Y) = \tau(\sigma(Y)). \qquad (*)$$

Inverznemu elementu σ^{-1} v fundamentalni grupi, ki ga določa pot σ, prehojena v obratni smeri, pripada pač inverzna transformacija.

Ker so stolpci transformiranke $\sigma(Y)$ linearne kombinacije stolpcev začetne fundamentalne matrike Y, povezuje oba nabora fundamentalnih rešitev obrnljiva konstantna matrika $\chi(\sigma)$, odvisna samo od elementa σ v $\pi_1(U)$. Ta matrika določa med fundamentalnima matrikama Y in $\sigma(Y)$ zvezo

$$Y = \sigma(Y)\chi(\sigma).$$

Naj bo še $\tau \in \pi_1(U)$, tako da velja tudi $Y = \tau(Y)\chi(\tau)$. Upoštevajmo enakost $(*)$ ter dejstvo, da je matrika $\chi(\sigma)$ konstantna in da transformacija analitičnega nadaljevanja ohranja linearne kombinacije funkcij, pa dobimo

$$(\sigma\tau)(Y)\chi(\sigma\tau) = Y = \tau(Y)\chi(\tau) = \tau(\sigma(Y)\chi(\sigma))\chi(\tau) = \tau(\sigma(Y))\chi(\sigma)\chi(\tau).$$

Odtod sledi $\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau)$, tako da je χ upodobitev grupe $\pi_1(U)$ v grupo $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ vseh obrnljivih matrik reda n. Seveda je pri tem $\chi(\iota) = \mathrm{I}$, identična matrika, inverznemu elementu σ^{-1} pa pripada inverzna matrika $\chi(\sigma)^{-1}$.

Fundamentalna matrika Y rešitev sistema (1) ni enolično določena, saj je za poljubno obrnljivo konstantno matriko C reda n matrika $\tilde{Y} = YC$ spet fundamentalna (in vsaka fundamentalna matrika se tako izraža z Y). Tudi na matriko $\tilde{Y}$ deluje grupa $\pi_1(U)$, tako da je npr. $\tilde{Y} = \sigma(\tilde{Y})\tilde{\chi}(\sigma)$ za vsak $\sigma \in \pi_1(U)$ in za neko upodobitev $\tilde{\chi}$ fundamentalne grupe $\pi_1(U)$. Potem pa je za vsak $\sigma \in \pi_1(U)$

$$\sigma(Y)\chi(\sigma)C = YC = \tilde{Y} = \sigma(\tilde{Y})\tilde{\chi}(\sigma) = \sigma(Y)C\tilde{\chi}(\sigma)$$

oziroma po krajšanju s $\sigma(Y)$ in množenju s C^{-1}

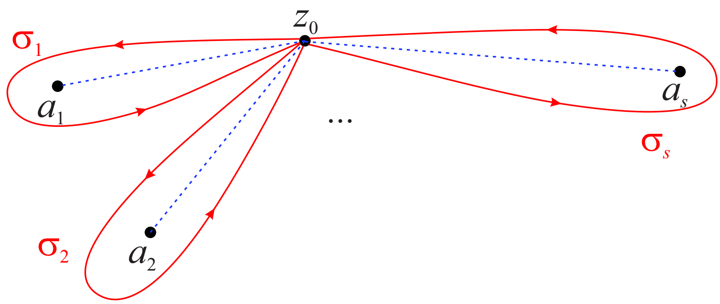
$$\tilde{\chi}(\sigma) = C^{-1}\chi(\sigma)C.$$

Vidimo, da je nova upodobitev podobna (konjugirana) prejšnji. Seveda nas zanimajo upodobitve fundamentalne grupe le do podobnosti natančno. Grupi $\{\chi(\sigma);\ \sigma \in \pi_1(U)\}$ rečemo *monodromijska grupa* sistema diferencialnih enačb (1), ustrezni upodobitvi

$$\chi : \pi_1(U) \to \mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$$

(bolj natančno njenemu podobnostnemu razredu) pa *monodromija* sistema (1).

Fundamentalna grupa $\pi_1(U)$ na U je generirana s sklenjenimi potmi (zankami), ki izhajajo iz ene (poljubne) točke in enkrat obkrožijo v pozitivnem smislu samo eno od singularnih točk. Naj bo σ_i taka pot, ki obkroži točko a_i (glej sliko 1). Produkt vseh teh posameznih poti (v grupi $\pi_1(U)$)



Slika 1. Enostavno sklenjene poti okrog singularnih točk, ki generirajo fundamentalno grupo.

je sklenjena pot, ki enkrat obkroži vse končne singularne točke. Ker neskončna točka ni singularna, je ta pot v množici U homotopna točki, torej predstavlja enoto v fundamentalni grupi, tako da je $\prod_{i=1}^{s} \sigma_i = \iota$. Zato za ustrezno upodobitev fundamentalne grupe velja

$$\prod_{i=1}^{s} \chi(\sigma_i) = I.$$

Vrnimo se k problemu H21. Ta torej sprašuje po Fuchsovem sistemu homogenih linearnih diferencialnih enačb (1) s predpisanimi singularnimi točkami na Riemannovi sferi in z dano monodromijsko grupo. Tradicionalno ga imenujemo tudi Riemann-Hilbertov problem zaradi odločilnega vpliva Riemannovih idej na vse tovrstne raziskave v drugi polovici 19. stoletja. V jeziku reprezentacij (upodobitev) se problem glasi:

Ali lahko vsako reprezentacijo (z obrnljivimi matrikami danega reda) fundamentalne grupe Riemannove sfere $\tilde{\mathbb{C}}$ *brez točk* $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ *realiziramo kot upodobitev monodromijske grupe nekega sistema* (1) *z enostavnimi poli?*

Oziroma na kratko:

Ali je vsaka taka reprezentacija fundamentalne grupe monodromija?

2. Regularno singularne točke in regularni sistemi

Definicija 2. Točka $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je *regularno* ali *pravilno singularna* točka sistema (1), če ima v njeni bližini vsaka rešitev $y = y(z)$ največ polinomsko rast, ko $z \to a$, tj. obstaja tak $\lambda > 0$, da pri pogoju $z \to a$ velja $y(z)|z - a|^{\lambda} \to 0$. Sistem je *regularen*, če je zanj vsaka točka v $\tilde{\mathbb{C}}$ bodisi regularna bodisi regularno singularna.

V resnici je treba biti pri definiciji še bolj pazljiv, ker ima rešitev $y = y(z)$ v točki a običajno logaritemsko singularnost. Zahtevati je treba kvečjemu polinomsko rast rešitve, ko se z bliža singularni točki a znotraj poljubnega sektorja (tako da ne obkroži a). Pokazali so, da je vsak Fuchsov sistem regularen (glej npr. [7] ali [11, str. 73]), obratno pa, kot se lahko hitro prepričamo (glej npr. sistem (5) v naslednjem zgledu), ne velja; regularnost je torej širši pojem. Na splošno nimamo preprostega kriterija, kdaj je poljuben linearni sistem oblike (1) z racionalno funkcijo $A(z)$ regularen.

Singularne točke imamo tudi pri linearni diferencialni enačbi višjega reda oblike

$$y^{(n)} + q_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + q_n(z)y = 0. \tag{2}$$

To so singularne točke njenih koeficientov $q_j(z)$, ki naj bodo meromorfne funkcije na $\tilde{\mathbb{C}}$. Med singularnimi točkami so nekatere lahko regularno oziroma pravilno singularne. Definicija regularnosti je za enačbe enaka kot za sisteme in jo lahko kar ponovimo.

Definicija 3. Točka $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je *regularno singularna* točka linearne diferencialne enačbe n-tega reda oblike (2), če ima v njeni bližini vsaka rešitev $y(z)$ največ polinomsko rast, ko $z \to a$. Enačba (2) je *regularna*, če je zanjo vsaka točka v $\tilde{\mathbb{C}}$ bodisi regularna bodisi regularno singularna.

V nasprotju s sistemom pa za tako skalarno enačbo višjega reda obstaja enostaven kriterij za regularnost posamezne singularne točke. O tem govori

Fuchsov izrek. *Singularnost $a \in \tilde{\mathbb{C}}$ je regularno singularna točka enačbe (2) natanko takrat, ko ima za vsak $j = 1, 2, \ldots, n$ koeficient $q_j(z)$ v točki a pol kvečjemu stopnje j.*

Za dokaz glej npr. [7, str. 129] ali [11, str. 85]. Zaradi tega izreka rečemo regularno (pravilno) singularni točki enačbe (2) tudi *Fuchsova singularna točka*, regularni enačbi pa *Fuchsova linearna diferencialna enačba.* Oba pojma se torej za enačbe ujemata.

Diferencialno enačbo (2) lahko na standardni način, tako da opazujemo vektor odvodov $(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, prevedemo na sistem diferencialnih enačb prvega reda

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \dots &\quad \dots\dots\dots \\ y_n' &= -q_n(z)y_1 - \dots - q_1(z)y_n \end{aligned} \tag{3}$$

Pri tem seveda velja, da je singularna točka regularna za sistem (3) natanko takrat, ko je regularna za diferencialno enačbo (2). Točka, ki je Fuchsova za enačbo (2), pa ni vedno Fuchsova tudi za standardni sistem (3), kot se lahko prepričamo že na preprostem primeru.

Zgled 2. Oglejmo si Eulerjevo linearno diferencialno enačbo 2. reda

$$z^2y'' + azy' + by = 0, \tag{4}$$

kjer sta a, b od nič različni kompleksni števili. Enačba ima dve singularni točki, $z = 0$ in $z = \infty$, ki sta obe Fuchsovi (tj. regularno singularni) za (4). Ustrezni standardni sistem, prirejen enačbi (4), pa je

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{b}{z^2}\, y_1 - \frac{a}{z}\, y_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Kot vidimo, točka 0 zanj ni Fuchsova, tako da sistem ni Fuchsov. Mimogrede, tudi neskončna točka ∞ ni Fuchsova, saj z uvedbo substitucije $z = 1/\zeta$ dobimo sistem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{1}{\zeta^2}\, y_2 \\ \dot{y}_2 &= b\, y_1 + \frac{a}{\zeta}\, y_2 \end{aligned}$$

Kljub temu lahko z drugačno transformacijo dobimo (nestandardni) sistem, ki pa je Fuchsov (obe singularni točki sta taki). To dosežemo, če uvedemo spremenljivki $y_1 = y$ in $y_2 = zy'$, od koder najdemo

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{z}\, y_2 \\ y_2' &= -\frac{b}{z}\, y_1 - \frac{a-1}{z}\, y_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Ker je Fuchsov, je ta sistem tudi regularen. Potem pa je regularen tudi sistem (5), saj ima skoraj iste rešitve kot sistem (6); če je namreč (y_1, y_2) rešitev sistema (6), je $(y_1, y_2/z)$ rešitev sistema (5).

Obravnavani sistem je poseben primer splošnega sistema, ki bi ga z isto transformacijo pridobili iz Eulerjeve diferencialne enačbe reda n, zato tudi nosi ime po Eulerju. Splača se ga zapisati vektorsko.

Eulerjev sistem reda n je sistem homogenih linearnih diferencialnih enačb, ki ga s konstantno kvadratno matriko A reda n lahko zapišemo v obliki

$$y' = \frac{1}{z}\,Ay. \tag{7}$$

Tudi ta splošnejši sistem ima samo dve singularni točki (pola prve stopnje v 0 in v ∞), zato je Fuchsov in torej tudi regularen. Fundamentalna grupa $\pi_1(U) = \{\sigma^k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ ima en generator σ, ki ustreza enemu obhodu okrog izhodišča v pozitivnem smislu, in je zato izomorfna grupi celih števil.

Določimo monodromijo tega sistema. Lokalna fundamentalna matrika rešitev je v tem primeru matrična funkcija

$$Y(z) = z^A := \exp[(\ln z)A].$$

Če je σ do homotopije edina sklenjena pot, ki enkrat v pozitivnem smislu obkroži koordinatno izhodišče 0 in se vrne v začetno točko, se vrednost logaritemske funkcije $\ln z$ spremeni v $\ln z + 2i\pi$, fundamentalna matrika rešitev pa doživi spremembo v

$$\sigma(Y)(z) = \exp[(\ln z + 2i\pi)A] = Y(z)\exp(2i\pi A).$$

Torej je $\chi(\sigma) = \exp(-2i\pi A)$. Ker je fundamentalna grupa generirana s σ, je monodromija Eulerjevega sistema (7) enaka razredu konjugiranosti matrike $\chi(\sigma) = \exp(-2i\pi A)$. Velja pa tudi obratno: razred konjugiranosti $[M]$ poljubne obrnljive matrike M reda n je monodromija nekega Eulerjevega sistema (7). Za vsako obrnljivo matriko M namreč obstaja taka matrika A, da je $M = \exp(-2i\pi A)$.

3. Plemljev pristop k reševanju problema H21

Leta 1905 je Hilbert delno rešil problem za primer dveh enačb in poljubno mnogo singularnosti. Problem je prevedel na neko rešljivo integralsko enačbo. Vendar je bila njegova metoda zamotana in ni dala pregleda nad celotno množico rešitev (primerjaj [21, 22]).

Naslednje leto je napovedal in nekaj let za tem, leta 1908, svojo rešitev predstavil Josip Plemelj [17]. Tudi on se je v dokazu naslonil na (Fredholmovo) teorijo integralskih enačb, h kateri je sam precej prispeval.[2] Reševanja glavnega problema se je lotil tako, da si je najprej zastavil naslednji robni problem, ki spada v teorijo analitičnih funkcij.[3]

Osnovni robni problem. *Naj bo Γ enostavno sklenjena gladka ali vsaj odsekoma (tj. razen v končno mnogo točkah) gladka orientirana krivulja v $\mathbb{C}$, ki omejuje notranje območje Ω^+ od zunanjega območja Ω^-, komplementa množice $\Omega^+ \cup \Gamma$ v $\tilde{\mathbb{C}}$, in naj bo $M(z)$ na Γ definirana ter povsod obrnljiva in odvedljiva matrična funkcija. Poiskati je treba* vse *vektorske (vrstične) funkcije $\phi = \phi(z)$, ki*

(a) *so analitične na $\Omega^\pm \setminus \{\infty\}$,*

(b) *jih lahko z obeh strani (na odsekih gladkosti) zvezno nadaljujemo na krivuljo Γ,*

(c) *notranje in zunanje limite $\phi_\pm(z)$ v vsaki gladki točki $z \in \Gamma$ zadoščajo robnemu pogoju*

$$\phi_+(z) = \phi_-(z)M(z), \tag{RP}$$

(d) *imajo v okolici neskončne točke $z = \infty$ polinomsko rast, se pravi, da za rešitev ϕ obstaja vrstični polinom γ z lastnostjo*

$$\phi(z) = \gamma(z) + O(1/z), \ |z| \to \infty.$$

Najvišji red polinomov, ki sestavljajo vrstični polinom γ iz točke (d), imenujemo *red rešitve ϕ v neskončnosti.* Iščemo torej vrstično funkcijo ϕ, ki zadošča vsem zahtevam iz točk (a), (b), (c) in je končnega reda v neskončnosti (primerjaj [21, str. 133–134]). Kadar je red v neskončnosti nič, mora biti rešitev v neskončni točki regularna, γ pa konstanten vrstični polinom (in $\phi(\infty) = \gamma$). Kadar je $\gamma = 0$, pa rečemo, da rešujemo *homogeni* robni problem.

Ni nujno predpostaviti, da je matrična funkcija $M(z)$, ki nastopa v točki (c), odvedljiva. Rešitev $\phi(z)$ tega robnega problema je mogoča tudi v primeru, ko je $M(z)$ samo Hölderjevo zvezna funkcija na Γ, kar pomeni,

[2] Za novo teorijo integralskih enačb se je začel zanimati leta 1900/01 med svojim bivanjem v Göttingenu, kjer je švedski matematik Erik Holmgren (1872–1943) predaval o Fredholmovem delu. Do leta 1908 je imel Plemelj objavljena že dva članka o integralskih enačbah, prvega o njihovi uporabi v teoriji potenciala (1903) in drugega o teoriji Fredholmovih enačb (1904) ter še dva članka o robnih problemih v potencialni teoriji (1904, 1907).

[3] Naj pripomnimo, da je Plemelj svoje rezultate izpeljal brez uporabe vektorskih in matričnih oznak, tu pa bomo uporabili moderni matematični zapis; sledili bomo Bothnerju, ki vrstične vektorje množi z matrikami na desni strani (glej [6, str. R6]), medtem ko Vekua v [21] uporablja množenje matrik s stolpci.

da za vsak njen koeficient $m_{ij}(z)$ obstajata taki pozitivni konstanti C in $0 < \alpha < 1$, da velja

$$|m_{ij}(z_1) - m_{ij}(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^\alpha$$

za poljuben par $z_1, z_2 \in \Gamma$ (glej [6, Hilbert Boundary Value Problem 4.1, str. R6 in Assumptions 4.2 in 4.3, str. R7]).

Za uporabo pa je pomemben tudi primer, ko je matrična funkcija $M(z)$ samo zvezna ali pa ima celo nezveznosti prve vrste (skoke) v končnem številu točk $a_1, a_2, \ldots, a_s$ na krivulji Γ. Že Riemann si je zastavil tak splošnejši problem v posebnem primeru, ko je matrična funkcija $M(z)$ odsekoma konstantna funkcija (tj. konstantna na posameznem krivuljnem loku med dvema zaporednima točkama a_i in a_{i+1}, kjer je $i = 1, 2, \ldots, s$ in $a_{s+1} = a_1$). Domneval je, da se na ta problem lahko reducira problem o monodromiji linearnih diferencialnih enačb, ni pa navedel nobenega dokaza (glej [21, str. 134]). To se je s Plemljevimi raziskavami izkazalo za resnično.

Plemelj je osnovni robni problem torej najprej rešil za funkcijo $M(z)$, ki je odvedljiva na vsej krivulji Γ (kot rečeno, bi bila dovolj že predpostavka, da je $M(z)$ Hölderjevo zvezna).[4] V tem primeru mu je problem uspelo prevesti na reševanje vektorske Fredholmove integralske enačbe druge vrste

$$\phi_-(z) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \phi_-(\lambda) \frac{K(z,\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda = \gamma(z), \quad z \in \Gamma, \tag{IE}$$

kjer je v števcu integralskega jedra matrična funkcija (glej [6, str. R8])

$$K(z,\lambda) = \frac{1}{2}[M(\lambda) - M(z)]M(z)^{-1}, \quad (z,\lambda) \in \Gamma \times \Gamma,$$

tako da je integralsko jedro $K(z,\lambda)/(\lambda - z)$, $\lambda, z \in \Gamma$, zaradi odvedljivosti (ali zgolj Hölderjeve zveznosti) matrične funkcije $M(\lambda)$ omejena in razen na diagonali $\lambda = z$ zvezna funkcija dveh spremenljivk (integralska enačba (IE) pri teh pogojih ni singularna).

Da zunanja funkcija $\phi_-(z)$ rešitve $\phi(z)$ *osnovnega robnega problema* reši tudi integralsko enačbo (IE), kjer je desna stran $\gamma(z)$ polinom iz točke (d), je lahko spoznati z uporabo splošnega Cauchyjevega izreka (da je za funkcijo, ki je analitična znotraj enostavno povezanega območja Ω z merljivim robom $\partial\Omega$ in zvezna na zaprtju $\overline{\Omega}$, njen integral po robu območja enak nič)

[4] Eksplicitno je v [17, str. 213] o koeficientih matrične funkcije $M(z)$ zapisal: “Da pa bi bila naša metoda uporabna, moramo te koeficiente predhodno omejiti s pogojem zveznosti, zato predpostavimo, da so to poljubne funkcije, ki so zvezne vzdolž mejne krivulje, poleg tega pa še enkrat odvedljive (isto nalogo obravnava Hilbert).” (Primerjaj tudi [18, str. 143].)

in Plemljevih formul [16] (glej npr. tudi [8]) o robnih vrednostih analitičnih funkcij.[5] Iz Plemljeve predpostavke o odvedljivosti matrične funkcije $M(z)$ sledi, da je vsaka zvezna rešitev enačbe (IE) tudi odvedljiva. Precej težje pa je natančneje določiti zvezo med rešitvami te integralske enačbe (z danim polinomom $\gamma(z)$ na desni strani) in rešitvami osnovnega robnega problema. Odgovoriti je treba vsaj na dve vprašanji:

1. *Ali je enačba* (IE) *sploh rešljiva v prostoru zveznih funkcij na krivulji* Γ?
2. *Ali iz vsake zvezne rešitve enačbe* (IE) *pridemo do rešitve osnovnega problema*?

Odgovor na ti dve vprašanji je Plemelj našel z uvedbo dveh dodatnih homogenih robnih problemov in pripadajoče adjungirane integralske enačbe (glej [6, str. R7–R11]). Med dokazovanjem je spet večkrat uporabil Cauchyjev izrek ter svoje formule, sklicevati pa se je moral tudi na Fredholmovo teorijo integralskih enačb (glej [13]).

Upošteval je še dejstvo, da ima (zaradi kompaktnosti ustreznega integralskega operatorja) vsaka homogena integralska enačba druge vrste samo končno mnogo linearno neodvisnih rešitev. Z uporabo poljubnega naravnega števila r, večjega ali enakega številu linearno neodvisnih rešitev integralskih enačb, ki pripadata dodatno uvedenima robnima problemoma, je pritrdilno odgovoril na zgornji vprašanji in na ta način posredno, vendar elegantno, rešil osnovni robni problem. Rezultat lahko zapišemo takole (primerjaj [6, str. R11–R14] in [21, str. 137–138]):

Izrek 1. *Pri primerno velikem naravnem številu* $r \in \mathbb{N}$ [glej zadnji odstavek] *obstaja za osnovni robni problem* (RP) *sistem rešitev* $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^n$, *ki so linearno neodvisne nad kolobarjem polinomov* $\mathbb{C}[z]$ *in njihov red v neskončnosti ne presega števila* r. *Vsaka rešitev robnega problema* (RP) *je potem njihova polinomska linearna kombinacija*:

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{n} q_i(z)\psi_i(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma,\ q_i \in \mathbb{C}[z].$$

Rešitve $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^n$ *sestavljajo vrstice* kanonske matrike $\Psi(z) = [\psi_{ij}(z)]_{i,j=1}^n$ *z lastnostmi*:

(a) det $\Psi(z) \neq 0$ *za vsak* $z \in \mathbb{C}$, *vključno za* $z \in \Gamma$ *z ustreznimi limitnimi vrednostmi* $\Psi_\pm(z)$;

(b) *obstaja taka diagonalna matrika* $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, *da je potem matrična funkcija*

[5] Članek o posplošitvi Cauchyjevega izreka iz teorije analitičnih funkcij [16], ki vsebuje omenjene formule, je objavil v isti številki revije *Monatshefte für Mathematik und Physik* tik pred svojim glavnim člankom o monodromiji [17].

$z^{\Lambda}\Psi(z) = \mathrm{diag}(z^{\lambda_i})\Psi(z)$ *obrnljiva pri* $z = \infty$.

Zgled 3. Oglejmo si zelo preprost zgled v dimeniziji $n = 1$. Krivulja Γ naj bo kar enotska krožnica v kompleksni ravnini, matrična funkcija na njej pa navadna potenca, npr. $M(z) = z^{-r}$ za poljubno naravno število $r \geq 1$. Preprosta rešitev robnega problema (RP) je zdaj funkcija $\psi(z) = (1, z^r)$ (se pravi, 1 za $|z| < 1$ in z^r za $|z| > 1$), vse druge pa so oblike $q(z)\psi(z)$ za poljuben polinom q.

Integralska enačba (IE), ki ustreza (RP), ima integralsko jedro

$$\frac{K(z,\lambda)}{\lambda - z} = \frac{(\lambda^{-r} - z^{-r})z^r}{2(\lambda - z)} = -\frac{\lambda^{-r}(\lambda^r - z^r)}{2(\lambda - z)} = -\frac{\lambda^{-r}(\lambda^{r-1} + \cdots + z^{r-1})}{2},$$

zato se lahko hitro prepričamo, da je njena rešitev res funkcija z^r (za desno stran $\gamma(z) = z^r$), saj je integral enak nič. Zanimivo pa je, da so rešitve te iste integralske enačbe (IE) tudi vse nižje potence z^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, in sicer za desno stran $\gamma(z) = 2z^k$, vendar nobena od njih ne vodi do rešitve za (RP). Zaradi $z^k M(z) = z^{k-r}$ bi bila to funkcija $f(z) = (z^{k-r}, z^k)$, ki pa v točki $z = 0$ ni regularna.

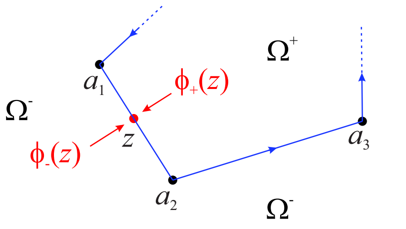
Izrek 1 rešuje osnovni robni problem v tolikšni meri, da ga je Plemelj lahko uporabil pri reševanju začetnega problema o eksistenci sistema homogenih linearnih diferencialnih enačb z danimi singularnostmi in s predpisano monodromijo. Da bi videli, kako je to storil, se najprej vrnimo k situaciji, opisani v prvem razdelku, in na poseben način izberimo krivuljo Γ in matrično funkcijo $M(z)$, ki nastopata v formulaciji osnovnega robnega problema.

Imamo končno mnogo točk $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$, množico $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ in poljubno upodobitev χ fundamentalne grupe $\pi_1(U)$ območja U v grupo vseh obrnljivih matrik reda n. Da bi rešil problem H21, je Plemelj obravnaval osnovni robni problem za poseben primer, ko območje Ω^+ v kompleksni ravnini omejuje enostavno sklenjena orientirana krivulja Γ, ki povezuje dane točke (glej spodnji sliki 2 in 3, povzeti po [6], kjer je krivulja Γ predstavljena s poligonsko črto). Pri tem naj bo Ω^- komplement množice $\Omega^+ \cup \Gamma$ v $\tilde{\mathbb{C}}$, z $[a_i, a_{i+1})$ pa označimo odsek krivulje Γ med dvema zaporednima točkama a_i in a_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, s$), pri čemer naj velja $a_{s+1} = a_1$.

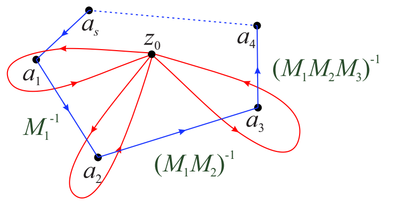
Naj bodo obrnljive matrike M_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, generatorji ustrezne monodromijske grupe. Definirajmo (glej sliko 3)

$$M(z) := (M_1 M_2 \ldots M_i)^{-1}, \quad z \in [a_i, a_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, s. \tag{8}$$

Potem je $M(z)$ obrnljiva odsekoma konstantna matrična funkcija, ki je na zadnjem odseku identična matrika, saj za $z \in [a_s, a_1)$ velja $M(z) = (M_1 M_2 \ldots M_s)^{-1} = I$.



Slika 2. Notranja in zunanja limita v točki $z \in \Gamma$.



Slika 3. Enostavna sklenjena krivulja Γ, ki povezuje singularne točke.

Tako definirana funkcija $M(z)$ seveda ni več odvedljiva povsod na krivulji Γ; v točkah a_j, skozi katere zdaj poteka Γ, ni niti zvezna, tako da izreka 1 ne moremo neposredno uporabiti. Tu pa si je Plemelj pomagal s posebnim postopkom *regularizacije* (glej [18, str. 156–165] ali [17, str. 228–236]; primerjaj tudi [6, str. R14–R16]). Pomnožil je $M(z)$ s primernimi faktorji, sestavljenimi iz končno mnogo potenc lomljenih linearnih funkcij (z ničlami in poli samo v točkah a_j), tako da je nova robna matrična funkcija postala odvedljiva povsod na krivulji Γ. V tem primeru je z uporabo izreka 1 lahko rešil ustrezni robni problem, nato pa z obratno transformacijo našel rešitve $\psi_i(z)$ tudi pri odsekoma konstantni matrični funkciji $M(z)$.

Te rešitve zdaj zadoščajo robnemu pogoju (RP) le na posameznih *odprtih* odsekih med singularnimi točkami (glej sliko 3), vendar je Plemelj pokazal, da jih lahko analitično nadaljujemo iz enega območja v drugo preko katerega koli odseka krivulje Γ oziroma vzdolž vsake poti v $\mathbb{C}$, ki se izogne točkam a_j. To pomeni, da nanje lahko gledamo kot na *večlične holomorfne funkcije* na vsej množici U z razvejišči v točkah a_j, $j = 1, 2, \ldots, s$ (ali kot na enolične globalno analitične funkcije na ustrezni Riemannovi ploskvi). Ker so bile pri njihovi konstrukciji uporabljene le linearne lomljene funkcije z ničlami in poli v a_j, imajo v okolici teh točk kvečjemu *polinomsko rast*, tako da velja isto potem tudi za kanonsko matriko $\Psi(z)$, ki je zdaj prav tako večlična (matrična) holomorfna funkcija na U.

Ker tudi kanonska matrika Ψ zadošča robnemu pogoju

$$\Psi_+(z) = \Psi_-(z) M(z) \text{ za } z \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\},$$

velja zanjo pri enostavnem obhodu okrog točke a_i zveza

$$\Psi(z) = \sigma_i(\Psi)(z) M_i = \sigma_i(\Psi)(z) \chi(\sigma_i), \;\; z \in \widetilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$$

(glej definicijo funkcije $M(z)$ v formuli 8 in sliko 3). Izberimo eno od singularnih točk, npr. a_1, in z diagonalno matriko Λ iz točke (b) izreka 1 definirajmo funkcijo

$$Y(z) := (z - a_1)^{\Lambda}\Psi(z),\ z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma, \tag{9}$$

ki je v točki $z = \infty$ omejena in obrnljiva. Kot večlična meromorfna matrična funkcija je $Y = Y(z)$ obrnljiva povsod na $\tilde{\mathbb{C}}$ in ima polinomsko rast v bližini vsake točke a_i.

Poleg tega se vzdolž poljubne sklenjene poti σ v U (tako kot kanonska matrika $\Psi(z)$) transformira v funkcijsko matriko $\sigma(Y) = Y\chi(\sigma)^{-1}$. Iz enakosti $Y = \sigma(Y)\chi(\sigma)$ pa sledi $Y' = \sigma(Y)'\chi(\sigma)$ in $Y^{-1} = \chi(\sigma)^{-1}\sigma(Y)^{-1}$, tako da je

$$Y'Y^{-1} = \sigma(Y)'\sigma(Y)^{-1}$$

in je zato matrična funkcija $A(z) = Y'(z)Y(z)^{-1}$ invariantna za delovanje monodromijske grupe. Torej predstavlja $A(z)$ enolično holomorfno matrično funkcijo na U, ki zaradi $Y' = A(z)Y$ določa sistem (1) z monodromijo χ, pri čemer je $Y = Y(z)$, definirana s formulo (9), fundamentalna matrika njegovih rešitev. Ker ima funkcijska matrika $Y(z)$ v okolici vsake singularne točke a_i polinomsko rast, velja isto za enolično matrično funkcijo $A(z)$, ki je zato racionalna, sistem (1) pa regularen v skladu z definicijo 2.

Na ta način je Plemelj pokazal, da je vsaka upodobitev χ fundamentalne grupe za dani U monodromija nekega *regularnega* sistema diferencialnih enačb (1).

Plemelj pa se pri tem ni ustavil, skušal je še dokazati, da ima dobljena matrična funkcija $A(z)$ same enostavne pole, se pravi, da je sistem Fuchsov. Brez večjih težav je ugotovil, da se da matriko $Y(z)$ izbrati tako, da to velja za vse izbrane singularne točke razen ene, npr. zadnje točke a_s. Nazadnje je z ustrezno modifikacijo začetne matrične funkcije $Y(z)$ odpravil še zadnjo oviro. Prav na tem zadnjem koraku pa se je v dokazu skrivala napaka, ki se je, kot kaže, profesor Plemelj vse do svoje smrti ni zavedal. Še bolj zanimivo je, da te napake tudi drugi matematiki niso odkrili skoraj petinsedemdeset let. Ker je bil Plemljev izrek splošnejši od Hilbertovega, dokaz pa bolj eleganten, je v matematični javnosti pač obveljalo prepričanje, da je on prvi dokončno (pozitivno) rešil problem H21.

Kaj se je zares zgodilo? Tri četrt stoletja pozneje so ugotovili, da je Plemelj potiho predpostavil, da je matrika $M_s = \chi(\sigma_s)$, ki pripada zanki okrog zadnje točke a_s, diagonalizabilna, ni pa tega dokazal. Luknjo v Plemljevem dokazu je v začetku osemdesetih let 20. stoletja odkril Armando Kohn Treibich; o njej je poročal na seminarju na École Normale Supérieure (glej [3, str. 106]). Zadostnost diagonalizabilnosti ene od generatorskih matrik za pozitivno rešitev problema H21 je potem konec osemdesetih let dokazal ruski matematik Julij S. Iljašenko, dvajset let kasneje pa je Vladimir P. Kostov našel še šibkejši zadosten pogoj: zadošča, da ima ta matrika v svoji jordanski obliki kvečjemu eno kletko reda 2, ostale pa reda 1 (glej [10, str. 7, opomba 2] ali [14]).

Brez zadnjega spodletelega koraka je torej Plemelj v resnici rešil pomemben podoben problem, ki pa se razlikuje od (moderne interpretacije) problema H21. Kot vidimo, je dokazal, da pri danih singularnih točkah in dani monodromiji obstaja sistem (1), ki je *regularen*, ne pa nujno *Fuchsov*. Rešitev je torej dobil v širšem razredu.

4. Kratka zgodovina reševanja problema H21 po letu 1908

S problemom se je istočasno kot Plemelj ukvarjal tudi na Slovaškem rojeni nemški matematik Ludwig Schlesinger (1864–1933), vendar se njegova kontinuitetna metoda ni izkazala za uspešno (o njej se je med obema matematikoma leta 1909 v časopisu *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Leipzig, razvila strokovna polemika, o kateri poroča tudi profesor Vidav [22, str. 30]).

Leta 1913 je Plemljev dokaz nekoliko poenostavil George David Birkhoff (1884–1944). Tudi on je spregledal zahtevo po diagonalizabilnosti ene od generatorskih matrik monodromijske grupe, saj je podrobnosti v dokazu na tem mestu kar preskočil in zapisal, da "splošni primer obravnavamo na enak način" (glej [3, str. 106]).

Leta 1928 je ruski matematik Ivan Andrejevič Lappo Danilevski (1896–1931) na izviren način konstruiral osnovne matrike $\chi(\sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$, monodromijske grupe, ki pripadajo enostavno sklenjenim potem okrog posameznih singularnih točk (glej [3, str. 106] in tudi [6, str. R17]). Rešitev je poiskal s pomočjo konvergentnih vrst za matrične koeficiente A_i iz formule za razcep matrične funkcije $A(z)$ sistema (1) na enostavne ulomke (glej str. 2). Iz njegove konstrukcije sledi, da je problem H21 pozitivno rešljiv, če so te matrike dovolj blizu identični matriki, je pa res, da bi to sledilo tudi iz Plemljevega pristopa (glej [3, str. 107] in [5, str. 1160]). Petdeset let kasneje so japonski matematiki M. Sato, T. Miwa in M. Jimbo našli te matrike tudi z uporabo kvantne teorije polja (primerjaj [3]).

Leta 1956 je B. L. Krilov z uporabo hipergeometričnih funkcij eksplicitno rešil problem H21 za sisteme dveh enačb s tremi singularnimi točkami (glej [6, str. R17]).

Naslednje leto je eksistenco regularnega sistema dokazal tudi Helmut Röhrl (1927–2014) z uporabo novejših metod iz teorije Riemannovih ploskev in algebraične geometrije. Njegov pristop je elementaren, vendar na ključnem mestu uporablja netrivialni izrek Birkhoffa in Grothendiecka o holomorfnih vektorskih svežnjih. Bil je prav tako prepričan, da je (na drugačen način) rešil Riemann-Hilbertov problem.

Uporaba holomorfnih vektorskih svežnjev in diferencialnih operatorjev na njih je značilna za moderno obravnavo problema H21 na poljubnih Riemannovih ploskvah. Z njim se je na ta način okrog leta 1970 ukvarjal tudi Pierre Deligne (roj. 1944)[6]. Iz njegove teorije znova sledi Plemljev rezultat, tj. upodobitev fundamentalne grupe kot monodromije regularnega sistema (1) z meromorfno matrično funkcijo $A(z)$, vendar na splošno ni mogel doseči monodromije Fuchsovega sistema [3].

V zvezi s tem je zanimivo, da je ta dognanja uporabil nizozemski matematik Wil Dekkers, ki je sicer delal na področju logike in računalništva. Leta 1979 je našel pozitivno rešitev za Fuchsove sisteme reda 2 s poljubno mnogimi singularnostmi (glej [3, str. 108] ali [5, str. 1160]). N. P. Erugin pa je leta 1982 obravnaval sistem dveh enačb s štirimi singularnimi točkami in pokazal povezavo s Painlevéjevo enačbo (glej [6, str. R17]).

Potem ko je leta 1964 izšla v angleščini Plemljeva knjiga *Problems in the sense of Riemann and Klein* [18], v kateri je v zadnjem razdelku opisal svojo rešitev problema, so se v začetku osemdesetih let pojavili prvi resnejši dvomi o dokončni rešitvi problema H21, konec desetletja pa tudi nova presenetljiva odkritja.

Kohn Treibich je svoje odkritje Plemljeve napake objavil leta 1983 [20], nanjo sta nekaj let kasneje (leta 1988) opozorila tudi ruska matematika Vladimir Arnold (1937–2010) in Julij Iljašenko (roj. 1943), glej [1, str. 7–8] in [2, str. 133]. Slednji je, kot smo že omenili, za rešitev problema postavil dodatni pogoj (namreč diagonalizabilnost ene od generatorskih matrik monodromijske grupe) in dokazal njegovo zadostnost.

Zadrego je – v nepričakovani smeri – razrešil ruski matematik mlajše generacije Andrej Bolibruch (1950–2003), ko je leta 1989 našel protiprimer regularnega sistema (1), za katerega ne obstaja noben Fuchsov sistem linearnih diferencialnih enačb z istimi singularnostmi in monodromijsko grupo (objavljen leta 1990 v ruščini in v angleškem prevodu [4]). Konstrukcija je bila narejena za tri enačbe in štiri singularne točke ($n = 3$, $s = 4$).

Matrike $A(z)$ ustreznega sistema ni težko napisati (glej [1, str. 14]):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1/2} & \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1/2} \\ 0 & \frac{1}{z} - \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-1/2)} & \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1/2)} \\ 0 & -\frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-1/2)} & -\frac{1}{z} + \frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1/2)} \end{pmatrix},$$

[6] Deligne je dobitnik Fieldsove medalje leta 1978 in še številnih drugih uglednih matematičnih oziroma znanstvenih priznanj, med njimi tudi Abelove nagrade leta 2013.

težko pa je dokazati, da je to res protiprimer za problem H21. Sistem očitno ni Fuchsov (točka 0 ni Fuchsova), možno pa je preveriti, da je regularen. Glavni problem je seveda dokazati, da ne obstaja noben Fuchsov sistem z istimi singularnostmi in isto monodromijo. Bolibruch je moral za to uporabiti Leveltovo posplošitev Poincaréjeve lokalne teorije. Ta protiprimer je poleg tega občutljiv za perturbacijo singularnosti: že pri majhnem premiku singularnih točk (ne da bi spremenili generatorje monodromijske grupe) se lahko zgodi, da ustrezen Fuchsov sistem obstaja (glej [4]).

Kasneje je Bolibruch našel še vrsto drugih protiprimerov, ki so stabilni v smislu perturbiranja singularnosti. O svojem delu na tem področju je leta 1994 poročal na mednarodnem matematičnem kongresu v Zürichu [5]. Istega leta je v soavtorstvu z D. V. Anosovom izšla njegova knjiga *The Riemann-Hilbert Problem* [1]. Po več kot devetdesetih letih je bil torej Hilbertov enaindvajseti problem (če ga razumemo v modernem smislu kot iskanje ustreznega Fuchsovega sistema linearnih diferencialnih enačb) rešen negativno, in to v nasprotju z dotedanjim prepričanjem o njegovi pozitivni rešljivosti.

Če je bil torej Josip Plemelj prvi uspešni reševalec Hilbertovega 21. problema, je postal Andrej Bolibruch njegov zadnji in dokončni reševalec (če v matematiki sploh lahko govorimo o dokončnih rešitvah, saj so vedno možne posplošitve ali drugačni pogledi na problematiko). Rešitev problema je Bolibruchu prinesla slavo, zaposlitev na moskovskem Matematičnem inštitutu Steklova, članstvo v ruski akademiji znanosti in redno profesuro na moskovski državni univerzi. Bolibruch se je kot dober matematik uveljavil tudi na Zahodu. Še naprej je raziskoval tematiko, povezano z Riemann-Hilbertovim problemom, o čemer je napisal okrog 100 člankov in nekaj knjig.[7]

5. Primeri pozitivnih rešitev

Negativna rešitev Hilbertovega 21. problema za sisteme seveda ne pomeni, da v posebnih primerih ne obstajajo pozitivne rešitve.

Povedali smo že, da je za sisteme z dvema linearnima diferencialnima enačbama prvega reda ($n = 2$) problem H21 vedno rešljiv neodvisno od števila singularnih točk (Dekkers). Andrej Bolibruch je v primeru $n = 3$ poleg odkritja navedenega protiprimera tudi natančno karakteriziral, kdaj je pri danih singularnostih in dani monodromiji možno poiskati ustrezni Fuchsov sistem (glej npr. [1, str. 133, Theorem 6.1.1]).

Podobno je problem pozitivno rešljiv, kadar je npr. upodobitev χ neraz-

[7] Na žalost je Andrej Bolibruch v štiriinpetdesetem letu starosti po hudi bolezni umrl 11. novembra 2003, natančno mesec dni pred 130. obletnico Plemljevega rojstva.

cepna oziroma ireducibilna, kar sta v začetku devetdesetih let (med seboj neodvisno) odkrila Vladimir Kostov in Andrej Bolibruch (glej [3, str. 115] ali [1, str. 11 in str. 83, Theorem 4.2.1]).

Rešljivost problema je zagotovljena še v nekaterih drugih primerih. Npr. takrat, kadar je med singularnostmi poleg polov prve stopnje tudi kakšna (vsaj ena) *navidezno singularna* točka (glej [3, str. 116] ali [5, uvod in poglavje o Fuchsovih enačbah]). Po definiciji je to taka singularnost, v okolici katere je rešitev sistema enolična analitična funkcija, ustrezna monodromijska matrika pa zato identiteta, torej diagonalizabilna. V tem primeru namreč zadnji del Plemljevega (in Birkhoffovega) dokaza velja (glej pojasnilo ob odkritju napake v tem dokazu na koncu 3. razdelka).

Pri homogenih linearnih diferencialnih enačbah višjega reda (2) se pojavijo nekatere posebnosti. Vemo npr., da se pri njih, drugače kot pri sistemih, definiciji Fuchsove in regularno singularne točke ujemata. Nadalje so ugotovili, da je nerazcepna upodobitev fundamentalne grupe za območje s s singularnimi točkami v grupo vseh obrnljivih matrik reda n odvisna od

$$N_r = n^2(s-2)+1$$

parametrov, medtem ko je parametrov pri Fuchsovi homogeni linearni diferencialni enačbi reda n z s singularnimi točkami kvečjemu

$$N_e = n^2(s-2)/2 + ns/2.$$

Zgornji formuli najdemo npr. v [3, str. 117] ali [1, str. 129 in 158]. Razlika obeh vrednosti

$$N_r - N_e = n^2(s-2)/2 - ns/2 + 1$$

je pri $n > 2$ in $s > 2$ pozitivna, kar pomeni, da je (že samo nerazcepnih) upodobitev tedaj več kot Fuchsovih enačb, tako da ni pričakovati, da bi se vsaka upodobitev fundamentalne grupe območja U dala realizirati z monodromijo neke Fuchsove enačbe z danimi singularnostmi. To pa je možno storiti, če med slednjimi dopuščamo tudi navidezne singularnosti a_i, pri katerih se ustrezna zanka σ_i preslika v identično matriko $\chi(\sigma_i) = \mathrm{I}$. Število parametrov se pri monodromiji danega reda z dodatnimi navideznimi točkami ne poveča, medtem ko se pri Fuchsovi enačbi to zgodi. Bolibruch je ocenil (glej [3, str. 117]), koliko največ navideznih singularnosti se potrebuje za realizacijo dane upodobitve fundamentalne grupe z monodromijo Fuchsove enačbe višjega reda (npr. pri nerazcepni upodobitvi kvečjemu toliko, kot znaša prej omenjena razlika v številu obeh vrst parametrov).

Ta pozitivni rezultat za enačbe višjega reda sledi iz Plemljevega dosežka, ko je reprezentacijo fundamentalne grupe pri danih singularnih točkah realiziral kot monodromijo nekega regularnega sistema. S primerno meromorfno transformacijo je namreč mogoče ta sistem preoblikovati v drug regularen sistem, ki je take oblike kot sistem (3), kjer so v zadnji vrstici racionalne funkcije $-q_n, -q_{n-1}, \ldots, -q_1$. (Dokaz tega dejstva sicer ni preprost, zahteva eksistenco cikličnega vektorja za nek operator odvajanja; glej [9, str. 42, Lemme 1.3].) Kot vemo, ima tedaj ustrezna enačba (2) s koeficienti $q_1, q_2, \ldots, q_n$ iste rešitve, pa tudi iste singularnosti in zato tudi isto monodromijo kot preoblikovani sistem, ki je za enačbo (2) standarden. Vse rešitve imajo okrog vsake singularne točke polinomsko rast, zato so njene singularnosti regularne, torej tudi Fuchsove in ustrezna enačba sama je Fuchsova. Posebnost pa je v tem primeru ta, da imajo zdaj racionalne funkcije q_i, ki smo jih pridelali v zadnji vrstici standardnega sistema, lahko pole tudi v navideznih singularnih točkah s trivialno monodromijsko matriko (glej [3, str. 117]).

V tem smislu, to je z dopuščanjem dodatnih navideznih singularnosti, je Hilbertov 21. problem za linearne diferencialne enačbe višjega reda torej pozitivno rešljiv. Navsezadnje ga je leta 1900, kot smo omenili že v uvodu, za enačbe in ne za sisteme originalno formuliral tudi Hilbert (glej H21). Čeprav se ni bolj natančno opredelil, bi morda utegnil tudi on s to formulacijo meniti, da ima enačba lahko poleg predpisanih singularnosti v danih točkah še kakšne navidezne singularnosti v drugih točkah.

V primerih pozitivnih rešitev so pogosto najprej uporabili znano Plemljevo "regularno" rešitev problema in jo šele nato modificirali do "Fuchsove" rešitve (primerjaj [1, str. 11]).

6. Zaključne misli

V matematiki se, tako kot v vsaki človeški dejavnosti, dogajajo napake. Ker pa je vsako objavljeno delo vsakega raziskovalca podvrženo strogemu strokovnemu preverjanju kolegov (če ne že pred objavo, pa po njej), je napaka po navadi hitro odkrita in (po možnosti) tudi popravljena. V Plemljevem primeru je nenavadno le to, da je do njenega odkritja prišlo razmeroma pozno.

Tudi nerazumevanja in nesporazumi so sestavni del življenja. Avtorja knjige [1] dopuščata možnost, da je v zvezi z reševanjem problema H21 do zmede prišlo zaradi različnih interpretacij in formulacij problema. Za to navajata nekaj razlogov:

Morda je Hilbert, ko je govoril o Fuchsovih točkah, imel v mislih regularne točke (kar je razrešil Plemelj). V začetku 20. stoletja teh dveh pojmov tudi še niso dobro razlikovali med seboj, še zlasti, ker se pri linearni diferencialni enačbi višjega reda oba ujemata, Hilbert sam pa je v originalni formulaciji svojega 21. problema uporabil izraz enačba.

Poleg tega je znano, da se dá vsako Fuchsovo diferencialno enačbo višjega reda s primerno meromorfno transformacijo preoblikovati v Fuchsov sistem z istimi singularnostmi in isto monodromijo (glej [5, str. 1164, Theorem 7]), podobno kot smo to storili z Eulerjevo diferencialno enačbo drugega reda v 2. razdelku. Še več, kot je ugotovil že Plemelj, se da lokalno, tj. za vsako singularno točko posebej, tudi vsak regularen sistem transformirati v v sistem, ki je Fuchsov povsod, razen v izbrani točki (glej tudi [1, str. 62, Theorem 3.2.1]). Nemara je to botrovalo misli, da je isto možno narediti tudi globalno, kar pa se je izkazalo za utvaro (razen če med izjemnimi točkami ni navideznih singularnosti).

Celotno zadevo lahko na kratko še najlažje pojasnimo z izjavo, da se v Hilbertovi formulaciji skrivata v resnici dva problema, "regularni" in "Fuchsov". Plemelj je rešil prvega, Bolibruch pa drugega.

Naj za konec omenimo, da je neodvisno od formulacije obravnavanega problema ter njegove končne (pozitivne ali negativne) rešitve Plemljev originalni pristop k problemu H21 pomemben še v nekoliko širšem smislu. Reševanje posebnih analitičnih robnih nalog z uporabo integralskih enačb se je namreč izkazalo za zelo koristno pri obravnavi različnih problemov sodobne matematike in matematične fizike. Bralec se lahko o modernih aplikacijah Plemljeve metode pouči v razpravi angleškega matematika Thomasa Bothnerja [6]. V njej avtor, poleg dovolj natančnega in v sodobnem matematičnem jeziku formuliranega opisa Plemljevih tovrstnih rezultatov, predstavi zlasti številne podrobno obdelane zglede uporabe funkcijske teorije in teorije singularnih integralskih enačb pri različnih modernih matematičnih in fizikalnih problemih. Pri vsakem posebej se potrudi poiskati izvor ustrezne rešitve (ali vsaj metode reševanja) v eni ali drugi varianti osnovnega robnega problema, kakršnega je razrešil Plemelj.

Zahvala

Profesorja dr. Pavle Saksida in akademik dr. Franc Forstnerič sta me opozorila na informativni članek Arnauda Beauvillea [3], ki me je vzpodbudil k pisanju tega prispevka. Začetno verzijo je prebral profesor dr. Bojan Magajna, kasnejšo pa profesor Forstnerič; oba sta mi dala več tehtnih pripomb, ki sem jih s hvaležnostjo upošteval. Predvsem pa bi se rad zahvalil anonimnemu recenzentu za res zelo skrben pregled rokopisa ter za podrobna vsebinska opozorila na napake in pomanjkljivosti, kakor tudi za številne koristne nasvete, ki so mnogo pripomogli k izboljšanju prvotnega besedila.

LITERATURA

[1] D. V. Anosov in A. A. Bolibruch, *The Riemann-Hilbert problem*, A Publication from the Steklov Institute of Mathematics, Aspects Math. **E22**, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 1994.

[2] V. I. Arnold in Yu. S. Il'yashenko, *Ordinary differential equations*, v: *Dynamical systems 1* (ur. D. V. Anosov in V. I. Arnold), Encyclopedia of Mathematical Sciences **1**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1988.

[3] A. Beauville, *Monodromie des systèmes différentieles linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch)*, Séminaire Bourbaki **1992/93**, Astérisque **216** (1993), Exp. No. 765, 103–119.

[4] A. A. Bolibruch, *Problema Riemana-Gilberta*, Uspehi Mat. Nauk **45**:2 (1990), 3–47; angl. prevod: *The Riemann-Hilbert problem*, Russian Math. Surveys **45**:2 (1990), 1–58.

[5] A. A. Bolibruch, *The Riemann-Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (Zürich, August 3–11, 1994), 1159–1168, Birkhäuser, Basel, 1995.

[6] T. Bothner, *On the origins of Riemann-Hilbert problems in mathematics*, Nonlinearity 34 (2021), R1–R73.

[7] E. A. Coddington in N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

[8] M. Černe, *Plemljeve formule*, Obzornik mat. fiz. **54** (2007), 185–193.

[9] P. Deligne, *Équation différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math. **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[10] R. R. Gontsov in V. A. Poberezhnyi, *Various versions of the Riemann–Hilbert problem for linear differential equations*, Russian Math. Surveys **63** (2008), 603—639 (Uspekhi Mat. Nauk **63**, 3–42).

[11] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley, New York, 1964.

[12] *Hilbert's twenty-first problem*, v: Wikipedia, the free encyclopedia, dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twenty-first_problem`.

[13] B. V. Hvedelidze, *Fredholm theorems*, v: Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, dostopno na `https://encyclopediaofmath.org/wiki/Fredholm_theorems`.

[14] V. P. Kostov, *Riemann-Hilbert problem*, v: Encyclopedia of Mathematical Physics, 2006, str. 436–441.

[15] A. Landesman, *Notes on fundamental group*, dostopno na `https://people.math.harvard.edu/~landesman/assets/fundamental-group.pdf`.

[16] J. Plemelj, *Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend*, Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 205–210.

[17] J. Plemelj, *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe*, Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 211–246.

[18] J. Plemelj, *Problems in the sense of Riemann and Klein*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **16**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1964.

[19] H. Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Math. **4** (1884), 201–312.

[20] A. Treibich Kohn, *Une résultat de Plemelj*, v: *Mathématique et Physique* (Séminaire de l'ENS 79–82), Progr. Math. **37**, str. 307–312, Birkhäuser, Boston, 1983.

[21] N. P. Vekua, *Uporaba nekaterih izsledkov J. Plemlja v teoriji singularnih integralskih enačb in robnih nalog linearne konjugiranosti*, Obzornik mat. fiz. **20** (1973), 133–144.

[22] I. Vidav, *Josip Plemelj, ob stoletnici rojstva*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1973.

OSEBNA LITERARNA ZAPUŠČINA JOSIPA PLEMLJA IN BELEŽNICA STIKOV

ŽELJKO OSET[1]

[1] HUN-REN, ERC Sovereignty

Ključne besede: Josip Plemelj, Georg Faber, Plemljeva beležnica kontaktov.

V članku je predstavljena osebna literarna zapuščina Josipa Plemlja, izpostavljena pa njegova osebna beležnica kontaktov iz leta 1912. Seznam kontaktov nakazuje možnosti za nadaljnje raziskave življenja in dela Josipa Plemlja, še posebej pa njegove intelektualne mreže.

THE PERSONAL LITERARY LEGACY OF JOSIP PLEMLJ AND THE CONTACT NOTEBOOK

The article deals with Josip Plemelj's personal documents and correspondence, with focus on Plemelj's address book from the year 1912. The article suggests possibilities for further research into the life and work of Josip Plemlj, especially into his intellectual network.

Osebna literarna zapuščina

V Arhivu Republike Slovenije je shranjena ohranjena osebna literarna zapuščina Josipa Plemlja. Zapuščino matematika, univerzitetnega profesorja, akademika in prvega rektorja Univerze v Ljubljani, je državnemu arhivu marca 2007 izročila Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, skupaj z osebno literarno zapuščino Riharda Zupančiča in Rajka Jamnika. Plemelj je skrbno hranil svoje osebne predmete in korespondenco, ki je obsežna, vendar še zdaleč ne popolna. Po obsegu je nadpovprečna, primerljiva z zapuščino znanstvenikov iz generacije, ki je poskrbela za institucionalizacijo znanosti na Univerzi v Ljubljani in Slovenski akademiji znanosti in umetnosti, kot so Fran Ramovš, Rihard Zupančič in Gregor Gojmir Krek. Za ohranitev Plemljeve zapuščine iz zgodnjega obdobja pred letom 1918 sta zaslužni Amalie Jankowa in Kitty Netolitzky; prva je bila služkinja družine Plemelj v Černovicah – po ruski zasedbi prestolnice Bukovine in po vselitvi treh ruskih častnikov v Plemljevo stanovanje jeseni 1916 je postala skrbnica osebnega premoženja; druga pa je bila žena černoviškega profesorja botanike Fritza Netolitzkya in družinska prijateljica Plemljevih. Po napredovanju centralnih sil na vzhodni fronti in vnovičnem prihodu avstro-ogrske vojske in civilnih oblasti v Černovice, je decembra 1917 služkinja spakirala osebne stvari družine Plemelj. Drobno osebno premoženje je bilo pripeljano na Dunaj in shranjeno pri družini Netolitzky[1], lastniško pohištvo pa v me-

[1]Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 9, št. 152.

teorološkem uradu na Dunaju (K&K Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik), kjer je Plemelj delal od julija 1917. O stanju pohištva je Plemlju poročal njegov bivši sodelavec iz Černovic, Viktor Conrad, vodja meteorološkega urada po razpadu monarhije. Conrad je upal, da razpad monarhije ne bo vodil tudi v prekinitev osebnih stikov med akademskimi kolegi[2]. Josip Plemelj je po upokojitvi na Slovenski akademiji znanosti in umetnosti v letu 1961, kjer je bil zaposlen od julija 1957, torej po upokojitvi na Univerzi v Ljubljani, začel urejati svojo zapuščino s ciljem napisati svoje spomine, v katerih bi obdelal svoje stike z matematičnim svetom[3]. Pri urejanju zapuščine je matematiku pomagala njegova hčerka, vendar dela zaradi bolezni ni dokončala. Kot je zapisal Kajetan Kavčič, Plemljev zet v pismu Đuru Kurepi januarja 1968: »Njena smrt je bila za njega tako hud udarec, da na kako delo sploh ni bilo mogoče misliti.«[4] V Plemljevi zapuščini je širok krog dopisnikov, čeprav Plemelj ni pretirano maral osebnih stikov in dopisovanja z akademskimi kolegi, s katerimi ni imel skupnih interesov; to pomeni, da niso bili ljubitelji narave in planin ali liberalno razmišljujoči razumniki. V mladosti se je družil še s politiki, vendar so ga ti dokončno razočarali med prvo svetovno vojno in po njej. Z večino kolegov na Univerzi v Černovicah in pozneje na Univerzi v Ljubljani je imel zgolj korektne uradne odnose. Tako je vsaj poročal Ministrstvu za prosveto v Beograd februarja 1935 ob izbruhu afere ob nadomestnih volitvah rektorja[5]. Povsem drugače pa je Plemelj dojemal svoje stike z matematiki. Korespondenca s kolegi matematiki je bila zanj žarek svetlobe v temačnem svetu, ki mu je pomagal pri izpolnitvi svojega življenjskega cilja po prihodu v Ljubljano. Ob proslavi 90. obletnice rojstva je v govoru na Slovenski akademiji znanosti in umetnosti povedal, da ni bil dober organizator, zato pa toliko boljši matematik in profesor, in da mu je uspelo izpolniti svoj ključni cilj po prihodu v Ljubljano: dvig matematike na evropsko raven[6]. Večino korespondence predstavljajo prejeta pisma, med dopisniki pa v strokovnih krogih prevladujejo nemški kolegi, tako tisti, ki jih je spoznal na Dunaju in v Černovicah, posebej močan krog pa predstavljajo matematiki, ki so študirali, raziskovali ali delovali v Göttingenu. Med vsemi dopisniki po obsegu in dolgotrajnosti izstopa korespondenca z Georgom Fabrom, nemškim matematikom, s katerim si je Plemelj dopisoval od leta 1901 do Fabrove smrti marca 1966[7].

[2]Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 10, št. 177.

[3]Željko Oset: Zgodovina Slovenske akademije znanosti in umetnosti: Razvoj najvišje znanstvene in umetniške ustanove (1945–1992). Ljubljana: Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 2017, str. 107.

[4]Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 9, št. 166.

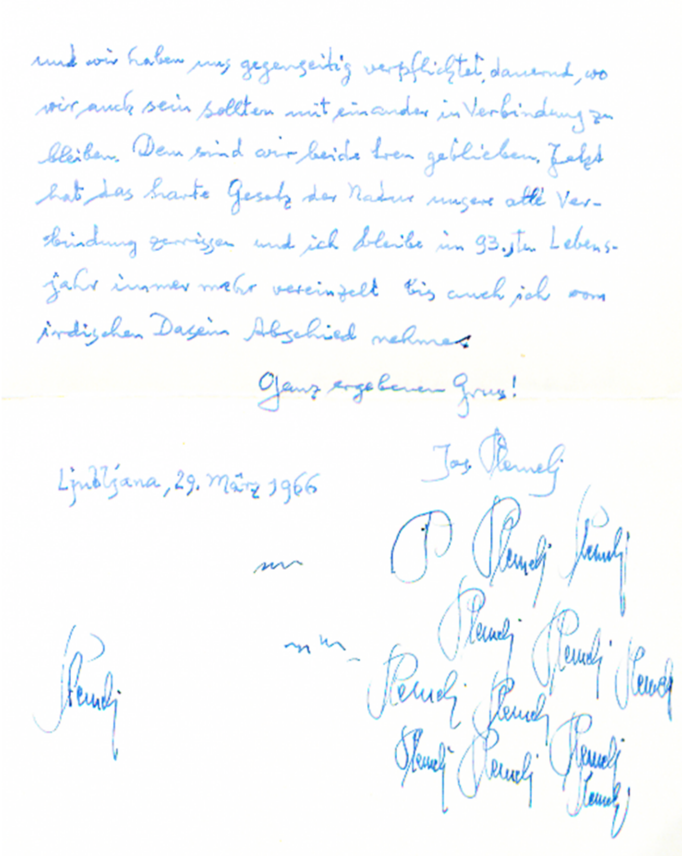
[5]AJ, 66-228-230, Univerzitet u Ljubljani 1930–1941, 1935, št. 867/35.

[6]Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 16, št. 379.

[7]Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 10, št. 188.

Slika 1. Fabrova dopisnica iz Münchna (29. september 1901) [2].

V zapuščini so tudi primerki vrnjene pošte in koncepti pisem. Pisanje konceptov nakazuje na Plemljeve visoke standarde pisanja pisem (še posebej v nemščini) in čistopisov. Koncepte pisem je pripravil, ker je želel narediti dober vtis, tako glede sloga kot tudi oblike pisave. Največ konceptov pisem je naslovljenih na Georga Fabra. Nemški matematik se je na starost navdušil nad grafološkimi analizami, torej nad tehniko, s katero so v nekaterih represivnih službah ocenjevali stopnjo dedne nagnjenosti h kaznivim dejanjem. Zaradi znanih razlogov so psevdoznanstveni pristopi izgubili veljavo v akademskem svetu, toda Faber je kljub temu želel dokazati svojemu prijatelju, da sta za njegovo neredno pisanje pisem kriva dedna obremenjenost z lenobo in malodušje, ne pa pomanjkanje pozornosti in naklonjenosti do kolega/prijatelja, s katerim se je spoprijateljil pred več kot petdesetimi leti v Hilbertovem in Kleinovem seminarju. Na drugi strani je Plemelj z brezhibno napisanimi pismi želel pokazati, da je gospod profesor, novo-humanistični izobraženec, človek stare meščanske družbe in visokih standardov ter da uspešno kljubuje staranju[8].


und wir haben uns gegenseitig verpflichtet, dauernd, wo wir auch sein sollten mit einander in Verbindung zu bleiben. Dem sind wir beide treu geblieben. Jetzt hat das harte Gesetz der Natur unsere alte Verbindung zerrissen und ich bleibe im 93.sten Lebensjahr immer mehr vereinzelt bis auch ich vom irdischen Dasein Abschied nehme.

Ganz ergebener Gruss!

Ljubljana, 29. März 1966

Jos. Plemelj

Slika 2. Josip Plemelj je 29. marca 1966 poslal sožalno pismo Fabrovi ženi; koncept pisma je uporabil tudi za vadbo podpisa [2].

[8] Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 10, št. 188.

Željko Oset

Plemljeva beležnica (1912)

Za Plemljevo raziskovalno udejstvovanje je bil ključen akademski grand tour v Nemčiji, v Berlinu, predvsem pa v Göttingenu, takrat enem izmed najpomembnejših matematičnih središč. Tam se je v seminarju Davida Hilberta in Felixa Kleina seznanil s številnimi matematiki, s katerimi je ostal povezan, predvsem zaradi svojih naknadnih raziskovalnih dosežkov. O tem imamo največ podatkov v Plemljevi zapuščini, tako v korespondenci, ki jo je vodil s Fabrom, kot v beležnici stikov. Beležnica je nedatirana, vendar je mogoče ugotoviti, da je glede na navedbe službenih mest matematikov (in fizikov) nastala v drugi polovici leta 1912. Na seznamu je 106 oseb, za katere je Plemelj praviloma navedel akademski naziv, akademsko institucijo in naslov. V nekaterih primerih, ko gre za černoviške kolege, torej Plemljeve sodelavce, so podatki nepopolni – zaradi bližine ni bilo potrebe po navajanju podatkov o akademskem nazivu ali naslovu. Podatki so bili prepisani iz predhodno pripravljenih in organiziranih izpiskov, naknadno pa je bilo dodanih zadnjih šest vpisov ter izvedena korektura podatkov. V nekaterih primerih so bili podatki dopolnjeni z navedbo novega naslova ali nove afiliacije[9]. Plemelj je vpisoval akademske nazive v treh kategorijah: dr., privatni docent (PD) in profesor (brez razlikovanja med izrednimi in rednimi profesorji), v nekaterih primerih pa naziv ni naveden. V tem oziru je treba opozoriti, da je Rihard Zupančič (Richard Suppantschitsch) naveden kot profesor na Tehniški visoki šoli na Dunaju. Na seznamu so poleg nemško govorečih matematikov in fizikov še italijanski, francoski, danski, švedski, finski, angleški, ameriški in japonski matematiki. Glede na Plemljeve biografske podatke in objavljene življenjepise na seznam vključenih matematikov, je mogoče ugotoviti, da je Plemelj nanj vključil aktivne avstrijske in madžarske matematike, torej sodržavljane, delujoče na avstro-ogrskih visokošolskih zavodih na Dunaju, v Gradcu, Innsbrucku, Brnu, Pragi, Černovicah, Budimpešti in Cluju. Na seznam je vključil tudi italijanske in francoske matematike, ki so se ukvarjali z raziskovalnimi vprašanji, ki so zanimala Plemlja, vendar je glede na njihove biografske podatke majhna verjetnost, da bi se osebno srečali. Največ vpisov je vezanih na središče nemškega matematičnega sveta v Göttingenu. To še posebej izstopa v primeru nordijskih, britanskih in ameriških matematikov, ki so vsaj del svoje akademske poti preživeli v Göttingenu. Nekatere je Plemelj osebno spoznal med svojim študijskim bivanjem v Göttingenu, o delu drugih pa je bil obveščen ali pa je bral njihove članke. Nemogoče je ugotoviti obseg komunikacije z na seznamu navedenimi znanstveniki, saj v Plemljevi zapuščini ne obstaja ohranjena korespondenca. Omogoča pa seznam vpogled v oblikovanje intelektualne mreže Josipa Plemlja, ki je v

[9] Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, š. 15, št. 322.

času nastanka beležnice dosegel odmevne raziskovalne uspehe in nagrade, s čimer je postal zanimiv za številne kolege matematike, ki so ga vabili k sodelovanju pri revijah in na kongresih. Zabeležba njihovih naslovov navaja k sklepu o vzpostavljenih stikih, vendar ohranjena korespondenca v večini primerov tega ne potrjuje. Z dodatnimi raziskavam v zapuščinah Plemljevih potencialnih korespondentov bo mogoče to sliko popraviti ali dopolniti.

V spodnji tabeli so prepisana imena z razrešenimi kraticami, dopisano je življenjsko obdobje, v desni koloni pa sta izpisana akademski naziv in afiliacija.

1.	Robert vitez D'ADHEMAR (1874–1941)	Prof. na Svobodni fakulteti za znanosti v Lillu, osebni naslov.
2.	Paul Emile APPELL (1855–1930)	Član Institut de France in profesor na Fakulteti za znanosti v Parizu, osebni naslov.
3.	Alex (Aleksander) AXER (1880–1948)	Dr., osebni naslov.
4.	Harry BATEMAN (1882–1946)	
5.	Felix BERNSTEIN (1878–1956)	Prof. na univerzi v Göttingenu, osebni naslov.
6.	Luigi BIANCHI (1856–1928)	Prof. na univerzi v Pisi, službeni naslov.
7.	Ludwig BIEBERBACH (1886–1982)	PD na univerzi v Königsbergu, osebni naslov.
8.	George David BIRKHOFF (1884–1944)	Prof. na Harvardu, osebni naslov.
9.	Wilhelm BLASCHKE (1885–1962)	PD na univerzi v Greifswaldu, osebni naslov.
10.	Otto BLUMENTHAL (1876–1944)	Prof. na tehniški visoki šoli v Aachnu, osebni naslov.
11.	Maxime BÔCHER (1867–1918)	Prof. na Harvardu, osebni naslov.
12.	Harald BOHR (1887–1951)	PD na Univerzi v Köbenhavnu, osebni naslov.
13.	Oskar BOLZA (1857–1942)	Prof. na univerzi v Freiburgu, osebni naslov.
14.	Emile BOREL (1871–1956)	Prof. v Parizu, osebni naslov.
15.	Gösta BUCHT (1884–1945)	PD na Univerzi v Uppsali, osebni naslov.
16.	Heinz BURKHARDT (1861–1914)	Profesor na Tehniški visoki šoli v Münchnu, službeni naslov.

17.	Konstantin CARTHEODORY (1873–1950)	Plemelj je napisal Göttingen brez drugih podatkov.
18.	Richard COURANT (1888–1972)	PD na univerzi v Göttingenu, osebni naslov.
19.	Jean Gaston DARBOUX (1842–1917)	Profesor. Sekretar matematične sekcije Francoske akademije znanosti, službeni naslov.
20.	Ludwig DAVID	PD na univerzi v Cluju, službeni naslov.
21.	Erwin DINTZL (1878–?)	Gim. prof. na Dunaju, osebni naslov.
22.	Viktor pl. DANTSCHER (1847–1921)	Prof. na univerzi v Gradcu, službeni naslov.
23.	Gustav pl. ESCHERICH (1849–1935)	Prof. na univerzi na Dunaju, osebni naslov.
24.	Georg FABER (1877–1966)	Prof. na univerzi v Königsbergu, osebni naslov.
25.	Leopold FEJÉR (rojen kot Leopold Weisz, Lipót Fejér) 1880–1959	Prof. na univerzi v Budimpešti, osebni naslov.
26.	Ernst FISCHER (1875–1954)	Prof. na univerzi v Erlangnu, osebni naslov.
27.	Philipp FRANK (1884–1966)	Prof. na (nemški) univerzi v Pragi, brez naslova.
28.	Ivar Erik FREDHOLM (1866–1927)	Prof. na Univerzi v Stockholmu, zasebni naslov.
29.	Rudolf FUETER (1880–1950)	Prof. na Tehniški visoki šoli Karlsruhe, brez naslova.
30.	Matsusburo FUJIWARA (1881–1946)	Prof. na Univerzi Tōhoku, Sendai na Japonskem, brez naslova.
31.	Johann GEITLER (1870–1923)	Prof., Plemljev sodelavec v Černovicah, brez naslova.
32.	GOLDSCHMIDT	
33.	GROSS W.	Dunaj, osebni naslov.
34.	Eduard GOURSAT (1858–1936)	Prof., Pariz, osebni naslov.
35.	August GUTZMER (1860–1924)	Prof. na univerzi v Halleju, osebni naslov.
36.	Giovanni Battista GUCCIA (1855–1914)	Prof. na Univerzi v Palermu, osebni naslov.
37.	Jacques HADAMARD (1865–1963)	Prof. na College de France in pariški politehniki.
38.	Eduard HACKEL (1850–1926)	Upokojeni profesor botanike.
39.	Hans HAHN (1879–1934)	Prof. na univerzi v Černovicah.
40.	Gustav HERGLOTZ (1881–1953)	Prof. na univerzi v Leipzigu, osebni naslov.

41.	Lucius HANNI (1875–1931)	Dunaj, osebni naslov.
42.	Georg HAMEL (1877–1954)	Prof. na Tehniški visoki šoli v Aachnu, osebni naslov.
43.	Friedrich HASENÖHRL (1874–1915)	
44.	Ernst HELLINGER (1883–1950)	PD na univerzi v Marburgu, osebni naslov.
45.	Erik HOLMGREM (1872–1943)	Prof. na Univerzi v Uppsali, naveden osebni naslov.
46.	David HILBERT (1862–1943)	Prof. na univerzi v Göttingenu, osebni naslov.
47.	Oliver KALLOGG (1878–1932)	Prof. na Univerzi v Misuriju, osebni naslov.
48.	Dunham JACKSON (1888–1946)	Prof. na Harvardu, službeni naslov.
49.	Marije KISELJAK (1883–1947)	Prof. na realni gimnaziji v Zagrebu, osebni naslov.
50.	Felix KLEIN (1849–1925)	Prof. na univerzi v Göttingenu, osebni naslov.
51.	Adolf KNESER (1862–1930)	Prof. na univerzi v Vroclavu, službeni naslov.
52.	Paul KOEBE (1882–1945)	Prof. na univerzi v Leipzigu, osebni naslov.
53.	KOHN G.	Dunaj, osebni naslov.
54.	Robert KÖNIG (1885–1979)	PD na univerzi v Leipzigu, osebni naslov.
55.	Arthur KORN (1870–1945)	Prof. na univerzi v Berlinu, osebni naslov.
56.	Erwin KRUPPA (1885–1967)	PD na univerzi v Černovicah.
57.	Eduard LANDAU (1877–1938)	Göttingen, osebni naslov.
58.	Giusseppe LAURICELLA (1867–1913)	Prof. na Univerzi v Cataniji, osebni naslov.
59.	Eugenio Elia LEVI (1883–1917)	Prof. na Univerzi v Genovi, osebni naslov.
60.	Tullio LEVI–CIVITA (1873–1941)	Prof. na Univerzi v Padovi, osebni naslov.
61.	Leon LICHTENSTEIN (1878–1933)	PD na Tehniški visoki šoli v Berlinu, osebni naslov.
62.	Ernst LINDELÖFF (1870–1946)	Prof. na Univerzi v Helsinkih, osebni naslov.
63.	Roberto MARCOLONGO (1862–1943)	Prof. na Univerzi v Neaplju, osebni naslov.
64.	Max Charles MASON (1877–1961)	Prof. na Univerzi v Wisconsinu.

65.	Gösta MITTAG-LEFFLER (1846–1927)	Prof. na Univerzi v Stockholmu, zasebni naslov.
66.	Emil MÜLLER (1861–1927)	Prof. na Tehniški visoki šoli na Dunaju, osebni naslov.
67.	Johann Oswald MÜLLER (1877–1940)	PD na univerzi v Bonnu, osebni naslov.
68.	Niels NIELSEN (1865–1931)	Prof. na Univerzi v Kopenhagnu, osebni naslov.
69.	William Fogg OSGOOD (1864–1943)	Prof. na Harvardu, službeni naslov.
70.	Paul PAINLEVE (1863–1933)	Član Institut de France in profesor na Fakulteti za znanosti v Parizu, osebni naslov.
71.	Émile PICARD (1856–1941)	Član Institut de France in profesor na Fakulteti za znanosti v Parizu, osebni naslov.
72.	Michel PLANCHEREL (1885–1967)	Prof. na Univerzi v Fribourgu, osebni naslov.
73.	Jozef Fürst PUZYNA (1856–1919)	Prof. na univerzi v Lvovu, službeni naslov.
74.	Michael RADAKOVIĆ (1866–1934)	Prof. na univerzi v Černovicah.
75.	Gustav RADOS (1862–1942)	Prof. na Tehniški visoki šoli v Budimpešti, osebni naslov.
76.	Johann RADON (1887–1956)	Asistent na Tehniški visoki šoli v Brnu.
77.	Frigyes RIESZ (1880–1956)	Prof. na univerzi v Cluju, službeni naslov.
78.	Alfred ROSENBLATT (1889–1947)	Asistent na univerzi v Krakovu, osebni naslov.
79.	Paul ROTH	Dr., Brno, osebni naslov.
80.	Hermann ROTHE (1882–1923)	PD na Tehniški visoki šoli na Dunaju, osebni naslov.
81.	Theodor SCHMID (1859–1937)	Prof. na Tehniški visoki šoli na Dunaju, osebni naslov.
82.	Erhard SCHMIDT (1876–1959)	Prof. na univerzi v Vroclavu, osebni naslov.
83.	Lothar SCHRUTKA (1881–1945)	Prof. na Tehniški visoki šoli v Brnu.
84.	Issay SCHUR (1875–1941)	PD na univerzi v Berlinu, osebni naslov.
85.	Paul STÄCKEL (1862–1919)	Prof. na Tehniški visoki šoli v Karlsruheju, osebni naslov.
86.	Rudolf STERNECK (1871–1928)	Prof. na univerzi v Gradcu, osebni naslov.
87.	Eduard STUDY (1862–1930)	Prof. na univerzi v Bonnu, osebni naslov.

88.	Richard SUPPANTSCHITSCH (1878–1949)	Prof. na Tehniški visoki šoli na Dunaju, osebni naslov.
89.	Heine TIETZE (1880–1964)	Prof. na Tehniški visoki šoli v Brnu.
90.	Otto TOEPLITZ (1881–1940)	Prof. na univerzi v Göttingenu, osebni naslov.
91.	Giuseppe VERONESE (1854–1917)	Prof. na Univerzi v Padovi.
92.	Vito VOLTERRA (1860–1940)	Prof. na Univerzi v Rimu, osebni naslov.
93.	Edward BURR VAN VLECK (1863–1943)	Prof. na Univerzi v Wisconsinu (Madison).
94.	Heinrich (Martin) WEBER (1842–1913)	Prof. na univerzi v Strasbourgu, osebni naslov.
95.	A. WEBSTER	Prof. na Univerzi Clark, ZDA, osebni naslov.
96.	Hermann WEYL (1885–1955)	PD na univerzi v Göttingenu, osebni naslov.
97.	Wilhelm WIRTINGER (1865–1945)	Prof. na univerzi na Dunaju (Plemljev profesor), osebni naslov.
98.	William Henry YOUNG (1863–1942)	Prof. na Univerzi v Cambridgeu.
99.	Stanisłav ZAREMBA (1863–1942)	Vodja matematičnega seminarja na Jagelonski univerzi v Krakovu, osebni naslov.
100.	Konrad ZINDLER (1866–1934)	Prof. na univerzi v Innsbrucku, osebni naslov. (Rojen v Ljubljani, Plemljev profesor na dunajski univerzi).
101.	Hans ZÖLLICH (1884–?)	Berlin, osebni naslov.
102.	Georg PICK (1859–1942)	Prof. na (nemški) univerzi v Pragi.
103.	Franz MERTENS (1840–1927)	V času vpisa je bil že profesor emeritus dunajske univerze; Plemljev profesor.
104.	Ludwig SCHLESINGER (1864–1933)	V času vpisa je bil profesor na univerzi v Giessnu.
105.	Carl NEUMANN (1832–1925)	Upokojeni univerzitetni profesor v Leipzigu.
106.	Giuseppe VITALI (1875–1932)	Profesor na klasični gimnaziji v Genovi, osebni naslov.

LITERATURA IN VIRI

[1] Arhiv Jugoslavije, AJ 66 (Ministarstvo prosvete Kraljevine Jugoslavije)
[2] Arhiv Republike Slovenije, AS 2012 (Josip Plemelj)
[3] Željko Oset: Zgodovina Slovenske akademije znanosti in umetnosti: Razvoj najvišje znanstvene in umetniške ustanove (1945–1992). Ljubljana: Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 2017, str. 107.

O DVEH NAGRADAH JOSIPU PLEMLJU ZA DELO O POTENCIALNI TEORIJI

BOŠTJAN KUZMAN

Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Math. Subj. Class. (2010): 01A60

Za svoje delo Potentialtheoretische Untersuchungen, objavljeno leta 1911, je Josip Plemelj prejel dve nagradi: nagrado Društva kneza Jablonowskega iz Leipziga in nagrado Richarda Liebena Dunajske cesarske akademije znanosti. V prispevku predstavimo nekaj manj znanih zanimivosti o ozadju nastanka tega Plemljevega dela ter podelitve obeh nagrad.

ABOUT THE TWO PRIZES TO JOSIP PLEMELJ FOR HIS WORK ON POTENTIAL THEORY

For his work Potentialtheoretische Untersuchungen, published in 1911, Josip Plemelj received two prizes: the prize of the Prince Jablonowski Society of Leipzig and the Richard Lieben prize of the Vienna Imperial Academy of Sciences. In this article, we present some lesser-known interesting facts about the background of this Plemelj's work and the history of the two awards.

Izraz potencialna teorija se je v fiziki 19. stoletja uveljavil za matematično teorijo, ki poenoteno obravnava gravitacijski in elektrostatični potencial preko reševanja Poissonove enačbe (oziroma Laplaceove enačbe v vakuumu) in študija harmoničnih funkcij. Josip Plemelj se je s tovrstnimi temami gotovo srečal že med svojim študijem matematike in fizike na Dunaju. Predmet z imenom Potencialna teorija je bil tudi prvi, ki ga je po vrnitvi iz podoktorskega študija v Berlinu in v Göttingenu kot privatni docent predaval študentom na dunajski univerzi v letu 1902/03.[1] V letih od 1903 do 1907 je objavil štiri znanstvene članke, ki so bili s potencialno teorijo neposredno povezani.[2] Svoje delo na področju potencialne teorije je Plemelj zaokrožil z obsežnejšim delom *Potentialtheoretische Untersuchungen* [11], ki ga je napisal v času svojega delovanja na Univerzi v Černovicah. Delo je kot *Preisschrift* (nagrajeni spis) izšlo v tiskani obliki leta 1911 pri nemški založbi Teubner iz mesta Leipzig na podlagi nagrade Društva kneza Jablonowskega[3], razpisane za leto 1910, za isto delo pa je Plemelj leta 1912 prejel še novoustanovljeno nagrado Richarda Liebena Cesarske

[1] Kot privatni docent je poleg Potencialne teorije na Dunaju predaval še Teorijo števil (1903/04), Eliptične funkcije (1905/06) in Funkcijsko teorijo (1906/07), glej [4].

[2] Gre za članke o uporabi Fredholmovih integralskih enačb ter o linearnih robnih nalogah v potencialni teoriji [7, 8, 9, 10].

[3] Fürstlich-Jablonowskische Gesellschaft oz. Societas Jablonoviana

akademije znanosti na Dunaju[4]. Nagradi sta Plemlju med nemškimi in avstrijskimi matematičnimi kolegi še utrdili sloves, ki si ga je pridobil z rešitvijo Riemann-Hilbertovega problema, in bi mu bržkone odprli vrata za nadaljevanje kariere na Dunaju ali v Nemčiji, če ne bi vmes posegla prva svetovna vojna. Z današnje časovne distance pa nagradi pričata tudi o tem, kako so ugledna znanstvena združenja in vplivni posamezniki z izborom nagradnih tem in prejemnikov usmerjali njihovo kariero in zgodovinski razvoj matematike.

Nagrada Društva Jablonowski in nastanek dela

Društvo kneza Jablonowskega je leta 1774 ustanovil poljski knez Józef Aleksander Jabłonowski (1711–1777). Društvo je prispevalo k razvoju akademske skupnosti v Leipzigu z nagradnimi razpisi za znanstvena dela na izbrane teme s področij matematike, fizike, ekonomije in zgodovine[5]. Med letoma 1847 in 1943 je nagrajena dela izdajalo tudi v knjižni obliki pod naslovom Preisschriften der Fürstlich-Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prvo matematično delo je v tej obliki izšlo leta 1847, ko je Hermann Grassmann prejel nagrado za rešitev Leibnizovega problema geometrijske karakteristike; njegovo delo je ocenil v Leipzigu delujoči August Möbius. Iz arhiva [17] je tudi razvidno, da so pred Plemljem nagrajena matematična dela prispevali še A. Wangerin za potencialne enačbe rotacijskih teles (1875), K. Rohn za delo o ploskvah reda 4 (1884), A. Tresse za razširitev Liejeve teorije invariant (1896), F. Büttner za študijo Greenovega dela o zakonih ravnovesja tekočin (1900), in E. R. Neumann za študijo metod C. Neumanna o reševanju robnih nalog potencialne teorije (1905).

Večino nagradnih nalog je bržkone zastavil v Leipzigu delujoči nemški matematik Carl Gottfried Neumann (1832–1925), sicer ustanovni urednik revije Mathematische Annalen, v kateri so bile nagradne naloge tudi objavljene. Neumanna, ki je znan po delu na področju elektrodinamike, so gotovo zanimali nerešeni problemi, povezani z njegovim delom na področju potencialne teorije. Od leta 1900 dalje je bilo tako vseh pet nagrad Društva Jablonowski za matematična dela namenjenih temu področju. Nagrado je za nadgradnjo metod svojega strica dvakrat prejel Carlov nečak Ernst Richard Neumann (1905 in 1912), zadnji matematični prejemnik pa je bil Gustav Herglotz (1914) za delo o analitičnem nadaljevanju potencialov[6].

Ko je Društvo Jablonowski v letu 1907 za leto 1910 razpisalo nagrado za najboljše delo za nadgradnjo teorije logaritemskega potenciala v znesku

[4] Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien

[5] Glej spletno stran Societas Jablonoviana [18].

[6] Razen Plemlja so bili vsi omenjeni nagrajenci tudi akademsko neposredno povezani z mestom Leipzig preko študija, mentorjev ali akademske kariere.

1500 nemških mark, je imel Plemelj za razpisano temo ustrezno znanje in reference (razen morda svojega porekla). Bil je v sicer burnem, a izjemno plodovitem življenjskem obdobju: zaključeval je delo o rešitvi Riemann-Hilbertovega problema (objavljeno leta 1908), žena Julka je 11. marca 1907 rodila hčerko Nado, po letu zaposlitve kot asistent na Tehniški visoki šoli na Dunaju je bil 24. septembra 1907 imenovan za izrednega profesorja v Černovicah, kjer se je moral privaditi novemu okolju in obsežnim službenim zadolžitvam, začel je graditi tudi vilo na Bledu.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, Adolph Mayer, Carl Neumann, Max Noether, Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein in Göttingen.

Walther v. Dyck in München — David Hilbert in Göttingen.

Otto Blumenthal in Aachen.

64. Band.

Mit 30 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1910.

Die meisten Aufgaben der Elektrostatik sind reduzierbar auf die Ermittelung der Greenschen Massenbelegungen, und es sind daher diese Belegungen für die Theorie der Elektrostatik, sowie überhaupt für die ganze Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit.

Durch neuerdings publizierte Untersuchungen (Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. W. Math.-phys. Kl. Jahrg. 1906, S. 483—558) dürfte wohl nun außer Zweifel gesetzt sein, daß in der Theorie des logarithmischen Potentials für jedwede geschlossene Kurve die dem Innen- und Außenraum entsprechenden beiden Greenschen Belegungen reduzierbar sind auf eine einzige Belegung, auf die sogenannte „Grundbelegung“, und daß Analoges auch gelte in der Theorie des Newtonschen Potentials für jedwede geschlossene Oberfläche.

Immerhin lassen die in Rede stehenden Untersuchungen bis jetzt noch vieles zu wünschen übrig. Demgemäß stellt die Gesellschaft folgende Aufgabe:

Es soll eine Arbeit geliefert werden, durch welche jene Theorie der „Grundbelegung“ in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.

Preis 1500 Mark.

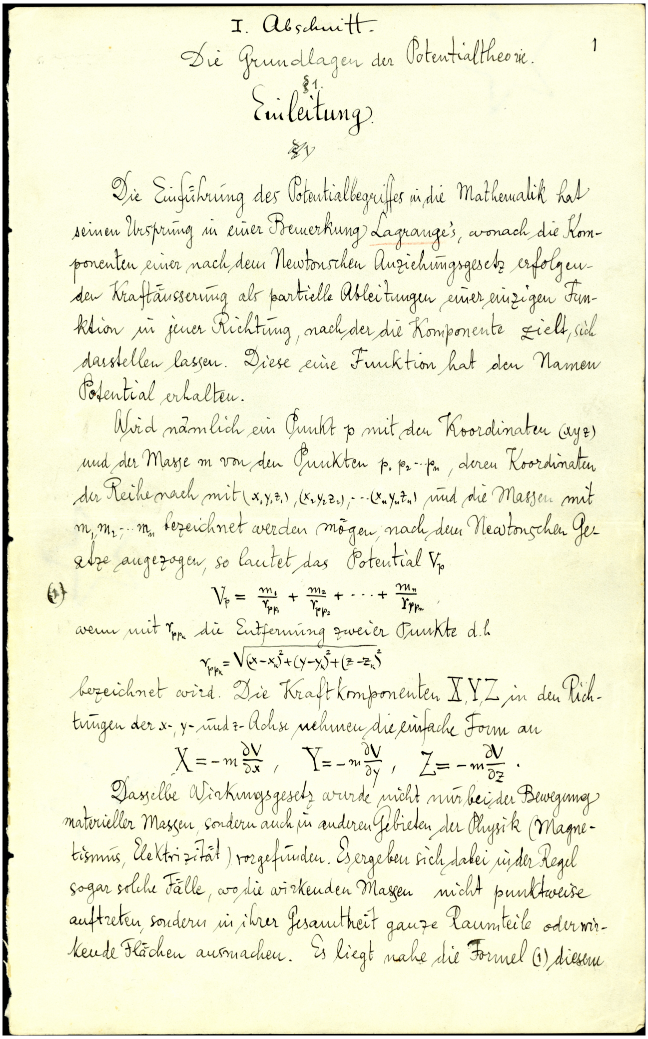
Slika 1. Naslovnica in razpis nagradne naloge v reviji Mathematische Annalen iz leta 1907

Besedilo nagradne naloge (*Preisaufgabe*) je bilo v letu 1907 objavljeno v treh tedaj najpomembnejših nemških matematičnih revijah.[7] Zahtevano delo naj bi ustrezno obravnavalo in poenotilo reševanje robnih nalog za zunanje in notranje območje za logaritemski in Newtonov potencial. Ob tem je brez naslova in imena avtorja, a z natančnimi bibliografskimi podatki eksplicitno omenjena razprava Carla Neumanna *Über das logarithmische Potential* iz Poročil Saškega Kraljevega društva [6], ki naj bi jo nagrajeno delo nadgradilo v smislu jasnosti ali strogosti izpeljav, ali v smislu obsega in popolnosti ugotovitev.

V zvezi z nagradnim razpisom je Plemlju njegov dunajski kolega Wilhelm Wirtinger v pismu[8] maja 1908 med drugim svetoval: »Vsekakor naj

[7] Poleg *Mathematische Annalen* še *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, ki izhaja še danes, ter *Zeitschrift für Mathematik und Physik*.

[8] Glej članek [13].



I. Abschnitt.

Die Grundlagen der Potentialtheorie. 1

§1.

Einleitung.

~~§1~~

Die Einführung des Potentialbegriffes in die Mathematik hat seinen Ursprung in einer Bemerkung Lagrange's, wonach die Komponenten einer nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz erfolgenden Kraftäusserung als partielle Ableitungen einer einzigen Funktion in jener Richtung, nach der die Komponente zielt, sich darstellen lassen. Diese eine Funktion hat den Namen Potential erhalten.

Wird nämlich ein Punkt p mit den Koordinaten (xyz) und der Masse m von den Punkten $p_1\, p_2 \cdots p_n$, deren Koordinaten der Reihe nach mit $(x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \cdots (x_n y_n z_n)$ und die Massen mit $m_1, m_2, \cdots m_n$ bezeichnet werden mögen, nach dem Newtonschen Gesetze angezogen, so lautet das Potential V_p

(1) $$V_p = \frac{m_1}{r_{pp_1}} + \frac{m_2}{r_{pp_2}} + \cdots + \frac{m_n}{r_{pp_n}},$$

wenn mit r_{pp_k} die Entfernung zweier Punkte d.h.

$$r_{pp_k} = \sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2}$$

bezeichnet wird. Die Kraftkomponenten $X\,Y\,Z$ in den Richtungen der x-, y- und z-Achse nehmen die einfache Form an

$$X = -m\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -m\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Dasselbe Wirkungsgesetz wurde nicht nur bei der Bewegung materieller Massen, sondern auch in anderen Gebieten der Physik (Magnetismus, Elektrizität) vorgefunden. Es ergeben sich dabei in der Regel sogar solche Fälle, wo die wirkenden Massen nicht punktweise auftreten sondern in ihrer Gesamtheit ganze Raumteile oder wirkende Flächen ausmachen. Es liegt nahe die Formel (1) diesem

Slika 2. Stran iz Plemljevega rokopisa Potentialtheoretische Untersuchungen

bo delo čim bolj obsežno in bogato z rezultati. Vseeno pa pišite tako, da vas bosta Neumann in Hölder lahko razumela, torej ne preveč zgoščeno in ne preveč novih oznak.« Nastalo Plemljevo delo je po naslovu in strukturi razmeroma podobno Neumannovima knjigama *Untersuchungen uber das Logarithmische und Newton'sche Potential* (1877) in *Hydrodynamische Untersuchungen* (1883), izdanima pri založbi Teubner.

Plemljev rokopis[9] *Potentialtheoretische Untersuchungen* obsega 21 strani

[9]Rokopis z opombami recenzenta C. Neumanna hrani Arhiv Republike Slovenije ([1],

predgovora, 6 strani kazala ter 150 strani kaligrafsko pisanega matematičnega besedila na papirju večjega formata. Delo ima štiri poglavja. V prvem so zbrane osnove potencialne teorije z nekaj novimi pristopi, v drugem je Fredholmova teorija integralskih enačb predstavljena s poenostavljenimi dokazi. Tretje poglavje obravnava robni nalogi za zunanje in notranje območje, posebej vsebinsko in metodično novo pa je po mnenju Ivana Vidava [14] četrto poglavje, ki obravnava zvezo med rešitvami robnih nalog za notranje in zunanje območje. V predgovoru Plemelj v celoti povzame besedilo nagradne naloge, predstavi okvirno vsebino in strukturo poglavij svojega dela, nato pa natančno komentira tudi posamezne paragrafe. Delo sicer ne vsebuje posebnega seznama virov. Plemljev rokopis je bil zaključen 18. novembra 1910, prejemnik nagrade pa razglašen v letu 1911, ko je delo izšlo tudi v tiskani obliki.

Družina Lieben in nagrade Dunajske cesarske akademije

S sredstvi zapuščine bankirja judovskega rodu Ignaza L. Liebna (1805–1862) je Avstrijska cesarska akademija znanosti ustanovila nagrado Ignaz Lieben Preis, ki je bila vsake tri leta podeljena avstrijskemu znanstveniku za izjemno delo s področja kemije ali fizike. Njen prvi prejemnik je bil fizik Jožef Stefan leta 1865 za delo *Doppelbrechung des Quartzes*[10]. Nagrada 900 goldinarjev je tedaj predstavljala slabo polovico letne plače univerzitetnega profesorja.[11] S podporo fundacije Liebnovih sinov[12] je akademija od leta 1900 dalje nagrado podeljevala vsako leto in jo razširila še na področje fiziologije. Sčasoma je dobila vzdevek avstrijska Nobelova nagrada.

Dodatno je najmlajši brat Richard v čast 60-letnice vladavine cesarja Franca Jožefa okoli leta 1908 ustanovil še poseben nagradni fond za matematiko. Nagrado R. Liebna v višini 2000 kron[13] je kot prvi matematik prejel prav Josip Plemelj (1912). Dopis akademije o podelitvi nagrade iz junija 1912 navaja, da je delo Potentialtheoretische Untersuchungen *najodličnejše delo avstrijskega matematika na področju teoretične ali uporabne matematike v zadnjih treh letih*[14]. Naslednji prejemnik je bil G. Herglotz (1915), tako kot Plemelj že prejemnik nagrade Jablonowski[15]. Nagrajencu

šk. 3, m. 49).

[10]Dvojni lom kremena

[11]Glej spletišče Fundacije I. Lieben, [16].

[12]Leopold von Lieben (1835-1915) in Richard Lieben (1842-1919) sta bila uspešna finančnika, Adolf Lieben (1836-1914) pa je bil uspešen znanstvenik in tudi Plemljev profesor kemije v času študija na dunajski univerzi.

[13]Za primerjavo: Plemljeva letna plača rednega profesorja brez dodatkov je leta 1912 znašala 6400 kron in se je z začetkom leta 1914 povišala na 7200 kron.

[14]Osebni dokumenti, [1], šk. 1, m. 11.

[15]Zdi se, da je bila nagrada R. Liebna morda podeljena tudi z željo povečanja ugleda

W. Grossu (1918) sta sledila še J. Radon in Plemljev akademski kolega iz Černovic Hans Hahn (1921), ter kot zadnji prejemnik nagrade R. Liebna še K. Menger (1928). Leta 1938 je bilo po priključitvi Avstrije k Nemčiji in preganjanju članov družine Lieben prekinjeno tudi podeljevanje nagrade Ignaza Liebna.[16]

Zaključek

Razpis nagrade Jablonowski je Plemlja nedvomno spodbudil k pisanju zaokroženega dela o potencialni teoriji. Čeprav Plemelj danes ni omenjan med njenimi zgodovinsko pomembnimi tvorci, se njegovo ime in rezultati še vedno navajajo kot klasični tudi v nekaterih sodobnih delih s tega področja[17]. Občudovanje Plemljevega *Preisschrift* v pismu Plemlju iz leta 1952 izraža tudi njegov mladostni znanec Hermann Weyl[18].

Prejem obeh nagrad je morda vplival tudi na Plemljevo nadaljnjo izbiro raziskovalnih problemov. Znano je, da ga je zanimala zadnja Fermatova domneva, za katero je bila s strani Kraljevega znanstvenega društva v Göttingenu leta 1908 razpisana nagrada magnata Paula Wolfskehla[19]. Morda se je spogledoval tudi z nagrado Pruske akademije znanosti v Berlinu, ki jo je leta 1914 prejel nemški matematik Paul Koebe[20]. Plemelj je v Koebejevi prisotnosti o njegovih rezultatih predaval leta 1913 na srečanju Nemškega matematičnega združenja na Dunaju.[21]

Plemljevo delo je nato zastalo v vihri prve svetovne vojne. Kot se je leta 1955 spominjal v pismu [22]: »Če bi jaz ne bil tedaj vpoklican k vojakom v najneprijetnejših okoliščinah kot *politisch verdächtig*[23], bi bilo drugače, tako

avstrijske matematike v primerjavi z vplivnejšo nemško, in zadržanju najboljših matematikov v Avstriji.

[16]Nagrado I. Lieben je Avstrijska akademija znanosti oživila leta 2004. Odtlej 36.000 USD vsako leto podelijo znanstveniku do 40. leta starosti, ki raziskuje na področjih molekularne biologije, kemije ali fizike in je v zadnjih treh letih delal v eni od držav z območja nekdanje Avstro-Ogrske. Leta 2019 je nagrado prejel slovenski fizik Gašper Tkačik, glej [15].

[17]Glej denimo monografijo [2]

[18]Hermann Weyl (1885–1955) je leta 1908 doktoriral iz integralskih enačb pri Hilbertu v Göttingenu, po emigraciji v ZDA leta 1933 pa je na Institute of Advanced Study Princeton sodeloval z nekaterimi najznamenitejšimi znanstveniki 20. stoletja, kot so A. Einstein, J. Von Neumann, K. Gödel in R. J. Oppenheimer.

[19]Plemelj naj bi njeno reševanje kmalu opustil, glej [14].

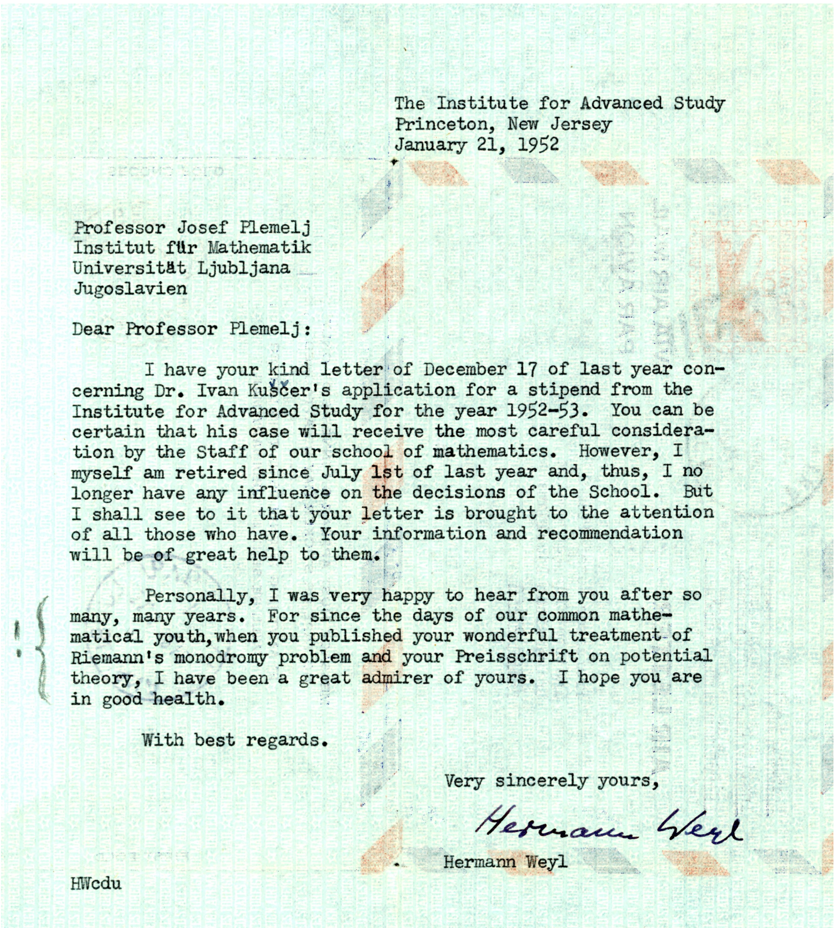
[20]To nagrado omenja [3].

[21]Med številnimi znanimi udeleženci tega srečanja je bil tudi A. Einstein, ki je predaval o problemu gravitacije, glej Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1913, 2. del, zvezek 7/8, str. 121.

[22]Glej članek Đ. Kurepe [5].

[23]politično sumljiv

pa sem zavzel stališče *der Wurstigkeit*[24], saj bo država propadla v vojni in se bo zame začelo drugo življenje.«



The Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey
January 21, 1952

Professor Josef Plemelj
Institut für Mathematik
Universität Ljubljana
Jugoslavien

Dear Professor Plemelj:

I have your kind letter of December 17 of last year concerning Dr. Ivan Kuščer's application for a stipend from the Institute for Advanced Study for the year 1952-53. You can be certain that his case will receive the most careful consideration by the Staff of our school of mathematics. However, I myself am retired since July 1st of last year and, thus, I no longer have any influence on the decisions of the School. But I shall see to it that your letter is brought to the attention of all those who have. Your information and recommendation will be of great help to them.

Personally, I was very happy to hear from you after so many, many years. For since the days of our common mathematical youth, when you published your wonderful treatment of Riemann's monodromy problem and your Preisschrift on potential theory, I have been a great admirer of yours. I hope you are in good health.

With best regards.

Very sincerely yours,

Hermann Weyl

Hermann Weyl

HWcdu

Slika 3. Weylovo pismo Plemlju iz leta 1952

LITERATURA

[1] Arhiv Republike Slovenije, AS 2012, Josip Plemelj.
[2] S. R. Bell, *The Cauchy Transform, Potential Theory and Conformal Mapping*, CRC Press, 2016.
[3] J. Gray, *A History of Prizes in Mathematics*, v: The Millenium Prize Problems, edited by J. Carlsonn, R. Joffe and A. Wiles. Clay Mathematics Institute, 2006.
[4] M. Hladnik, *Akademska kariera profesorja dr. Josipa Plemlja (1873-1967)*, Šolska kronika, 1-2 (2020), 81–120.

[24] brezbrižnost

[5] Đ. Kurepa, *Plemelj Josip*, Matematični vesnik, Beograd, letnik 20, št. 5 (1968), 229–242.
[6] C. Neumann, *Über das logarithmische Potential*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse (Bd. 58), S. 482–559.
[7] J. Plemelj, *Über die Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Potentialtheorie*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien 1903.
[8] J. Plemelj, *Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung*, Monatshefte für Mathematik und Physik 15 (1904), 93-128.
[9] J. Plemelj, *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie I. Teil*, Monatshefte für Math. und Physik 15 (1904), 337-412.
[10] J. Plemelj, *Über lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie II. Teil*, Monatshefte für Mathematik und Physik 18 (1907), 181-211.
[11] J. Plemelj, *Potentialtheoretische Untersuchungen.* Preisschriften der fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft in Leipzig, 1911, XIX + 100 str.
[12] A. Suhadolc, *O profesorju Josipu Plemlju*, Obzornik za matematiko in fiziko 57 (2010), 53–57.
[13] S. Vernig, *Ljudje in kraji – sopotniki Josipa Plemlja*, Razgledi muzejskega društva Bled za leto 2006, Bled 2007, 7–26.
[14] I. Vidav, *Josip Plemelj, ob stoletnici rojstva*, DZS, Ljubljana, 1973.
[15] Spletišče OEAW o Liebenovi nagradi, `https://stipendien.oeaw.ac.at/en/preise`.
[16] Spletišče fundacije Ignaz Lieben, `https://www.i-l-g.at/ignaz-lieben-preis`.
[17] Katalog SLUB Dresden, `https://katalog.slub-dresden.de/id/0-837628652`.
[18] Spletišče Societas Jablonowiana, `https://home.uni-leipzig.de/jablonov`.
[19] Wikipedija: življenjepisi oseb.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JUNIJ 2024
Letnik 71, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Grafika iz dokumentarnega filma *Josip Plemelj, prvi rektor Univerze v Ljubljani*, režiserja Mirana Zupaniča in scenarista Boštjana Kuzmana, produkcija Univerza v Ljubljani, december 2023. Avtorica fotografije Rosa Jenik Dorfler, 17. maja 1904 na Dunaju, grafična obdelava Andrej Avanzo.