1. izbirni test za MMO 2025

Ljubljana, 14. december 2024

1. Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Konveksen n-kotnik razdelimo na trikotnike z $n-3$ diagonalami, ki se ne sekajo v notranjosti n-kotnika. Trikotnike pobarvamo z rdečo oziroma zeleno barvo tako, da nobena dva trikotnika s skupno stranico nista iste barve. Določi najmanjše možno število rdečih trikotnikov, ki jih pri tem dobimo.

2. Naj bo ABC trikotnik z višinsko točko H in očrtano krožnico ω. Naj bosta D in E zrcalni sliki točke A čez točki B in C zaporedoma. Z M označimo razpolovišče daljice DE. Dokaži, da je premica HM pravokotna na tangento na ω v točki A.

3. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere je
$$(f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y)$$
za vsa realna števila x in y.

4. Pravimo, da je zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ celih števil *praznično*, če obstaja taka funkcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da za vsa naravna števila i, j in n velja $n \mid a_i - a_j$ natanko tedaj, ko $f(n) \mid i - j$. Poišči vsa praznična zaporedja.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 4 ure 30 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

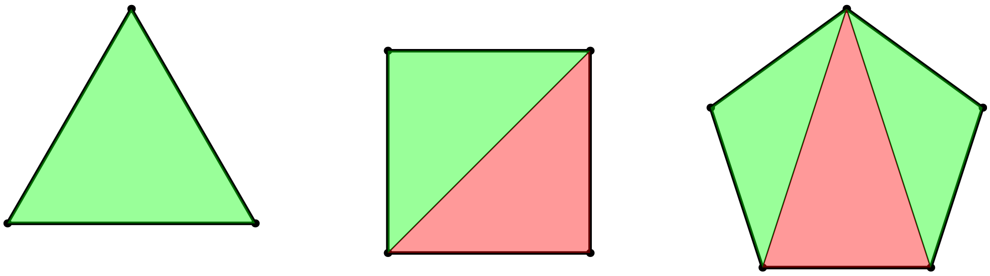
Naloge so tajne do objave na spletni strani priprav.

Rešitve

1. Trdimo, da je odgovor $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil$. Najprej pokažimo, da vedno dobimo vsaj toliko rdečih trikotnikov.

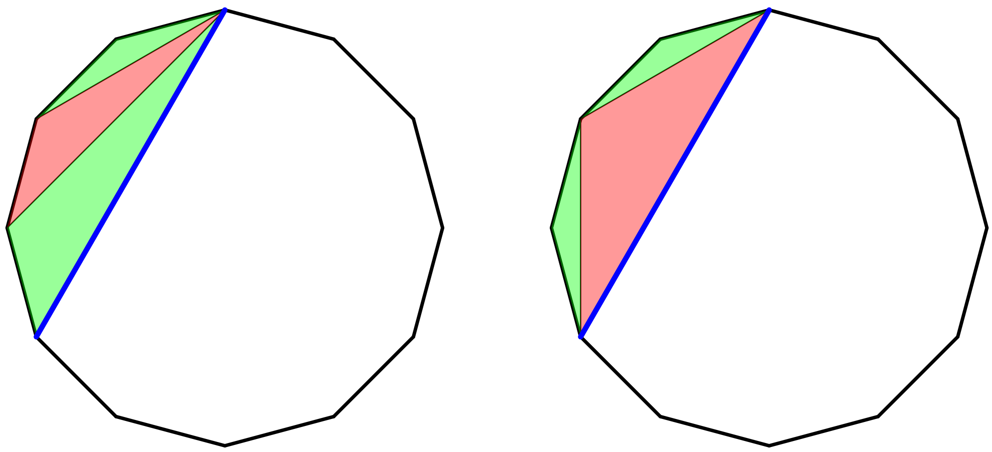
   Vsaka od $n-3$ diagonal je stranica dveh trikotnikov v razdelitvi. Ker morata ta trikotnika biti različne barve, je torej natanko en rdeč. Naj bo k število rdečih trikotnikov. Po Dirichletovem principu mora tako veljati $\frac{n-3}{k} \leq 3$, saj ima vsak trikotnik samo tri stranice. Sledi, da je $k \geq \frac{n-3}{3}$, ker pa je k celo število, res dobimo $k \geq \left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil$.

   Pokažimo še, da obstaja razdelitev z natanko $\left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil$ rdečimi trikotniki. To naredimo z indukcijo – na spodnjih slikah so prikazani primeri $n \leq 5$:



Slika 1: Baza indukcije

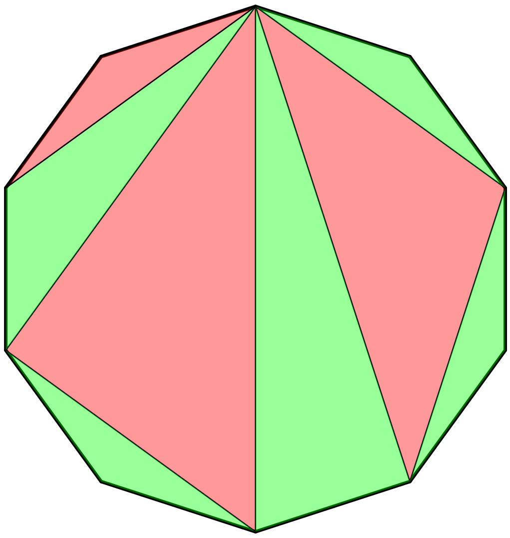
   Nadaljujemo s korakom $n \to n+3$. Opazimo, da lahko $(n+3)$-kotnik z diagonalo razdelimo na n-kotnik in 5-kotnik, kot je prikazano na spodnji sliki.



Slika 2: Indukcijski korak

   Sedaj lahko n-kotnik pobarvamo tako, da je natanko $\left\lceil \frac{n-3}{3} \right\rceil$ trikotnikov rdečih. Petkotnik lahko nato razdelimo in pobarvamo na enega izmed načinov, ki je prikazan na zgornji sliki, s tem pa zagotovimo, da bosta trikotnika z modro stranico različne barve. Tako so izpolnjeni vsi pogoji, dobimo pa natanko $1 + \lceil \frac{n-3}{3} \rceil = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ rdečih trikotnikov.

Komentar: Konstrukcijo lahko podamo tudi direktno. Na spodnji sliki je konstrukcija za $n = 10$, ki se naravno posploši na splošen n-kotnik.



Slika 3: Konfiguracija za $n = 10$

2. **1. način:** Naj bo N razpolovišče daljice BC in A' zrcalna slika točke H čez N. Znano je, da A' leži na ω. Še več, vemo, da je AA' premer krožnice ω, zato je AA' pravokotna na tangento na ω v točki A. Dovolj je torej dokazati, da je $AA' \parallel MH$.

   Opazimo, da sta si trikotnika ABC in ADE podobna. Iz te podobnosti sledi, da so točke A, M in N kolinearne, poleg tega pa je $\frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{1}{2}$. Sklepamo, da je N razpolovišče daljice AM. Z drugimi besedami, M je zrcalna slika A čez točko N. Od tod sledi, da je HM zrcalna slika premice AA' čez točko N, zato sta ti res vzporedni.

   2. način: Ker je MC srednjica v trikotniku ADE, je $MC \parallel AD$. Simetrično je $MB \parallel AE$, zato je $ABMC$ paralelogram. Naj bo H' zrcalna slika točke H čez premico BC. Izrazimo lahko

$$\angle BHC = \angle CH'B = \angle CAB = \angle BMC,$$

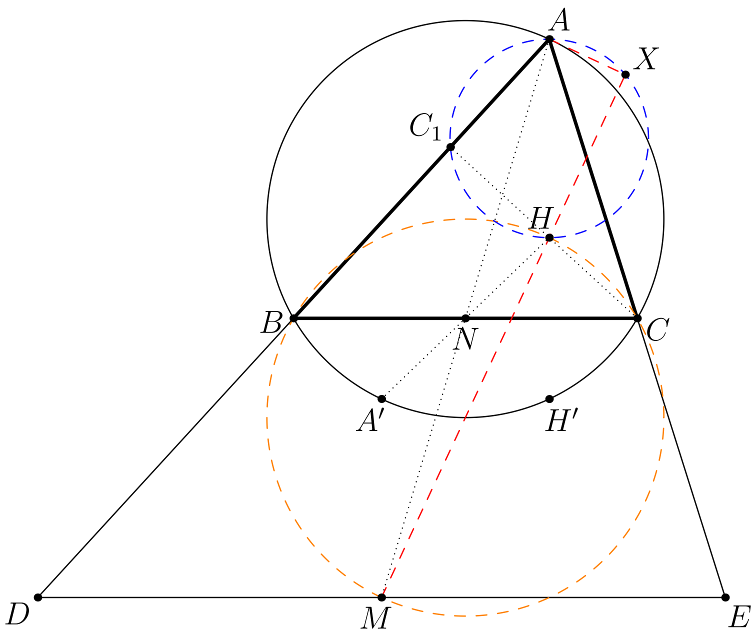
   kjer smo upoštevali, da sta H in H' zrcalni sliki, tetivnost štirikotnika $ABCH'$ in to, da je $ABMC$ paralelogram. Sledi, da je $BMCH$ tetiven štirikotnik.

   Naj bo C_1 nožišče višine iz C, X pa presečišče premice HM s tangento na ω v točki A. Ob upoštevanju zgornjih ugotovitev in pogojem tangetnosti dobimo

$$\angle C_1HX = \angle CHM = \angle CBM = \angle BCA = \angle BAX = \angle C_1AX.$$

Sledi, da so točke A, X, H in C_1 konciklične, zato je

$$\angle AXH = \angle AC_1H = 90^\circ.$$



Slika 4: Konfiguracija 2. naloge

3. Najprej preverimo, katere konstantne funkcije rešijo enačbo. Če velja $f(x) = c$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, velja

$$c^2 - cy = c - cy,$$

kar je mogoče le za $c \in \{0, 1\}$, od koder dobimo dve rešitvi.

Sedaj predpostavimo, da f ni konstantna funkcija. Enačbo preoblikujemo v

$$y \cdot (f(x + f(y)) - f(y)) = f(x) \cdot f(x + f(y)) - f(x^2).$$

Predpostavimo, da je $f(a) = f(b)$. Ker f ni konstantna, obstaja tak $c \in \mathbb{R}$, da je $f(c+f(a)) \neq f(a)$. V zgornjo enačbo lahko vstavimo $y \to a$ in $x \to c$ in izrazimo

$$a = \frac{f(c) \cdot f(c + f(a)) - f(c^2)}{f(c + f(a)) - f(a)}.$$

Simetrično je

$$b = \frac{f(c) \cdot f(c + f(b)) - f(c^2)}{f(c + f(b)) - f(b)}.$$

Ker pa je $f(a) = f(b)$, sta desni strani zgornjih enačb enaki. Sledi, da je $a = b$. Dokazali smo, da je f injektivna.

Če v enačbo vstavimo $y \to 0$, dobimo

$$f(x) \cdot f(x + f(0)) = f(x^2),$$

s substitucijo $y \to f(x)$ pa

$$0 = f(x^2) - f(x)f(f(x)).$$

Skupaj s tema enačbama dobimo

$$f(x) \cdot f(f(x)) = f(x^2) = f(x) \cdot f(x + f(0)).$$

Za vsak x tako velja $f(x) = 0$ ali pa $f(f(x)) = f(x + f(0))$. V drugem primeru iz injektivnosti sledi kar $f(x) = x + f(0)$. Za število $t = -f(0)$ imamo tako velja $f(t) = 0$ ali pa $f(t) = t + f(0) = 0$, zato je t ničla funkcije f. Zaradi injektivnosti za vsak $x \neq t$ tako dobimo $f(x) = x + f(0)$. Enačba seveda velja tudi za $x = t$, zato je to predpis rešitve na celi domeni. Preostane nam še preizkus predpisa $f(x) = x + c$. Veljati mora

$$(x + c - y) \cdot (x + y + 2c) = x^2 + c - y \cdot (y + c),$$

kar je ekvivalentno

$$c \cdot (3x + 2c - 1) = 0.$$

Sledi, da je edina možnost $c = 0$. Vse rešitve so tako

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R},} \quad \boxed{f(x) = 1 \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}} \quad \text{in}$$
$$\boxed{f(x) = x \text{ za vsak } x \in \mathbb{R}.}$$

4. Za vsako praznično zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ velja

$$n \mid a_{i+k} - a_i \iff f(n) \mid k \iff n \mid a_{j+k} - a_j.$$

Če je $a_{i+k} - a_i = 0$, je zgornja deljivost izpolnjena za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato je tudi $a_{j+k} - a_j = 0$ za vsak $j \in \mathbb{N}$. V nasprotnem primeru je $|a_{i+k} - a_i|$ največja vrednost števila n, ki deli zgornjo razliko. Zaradi ekvivalence tako dobimo $|a_{i+k} - a_i| = |a_{j+k} - a_j|$ za vsa naravna števila i, j in k.[1] Sedaj ločimo dva primera.

[1] Enačba namreč trivialno velja tudi v prvem primeru, ko sta razliki enaki 0.

i) Če je $a_1 = a_3$, je zaporedje periodično s periodo 2. Velja torej

$$a_n = \begin{cases} x, & 2 \mid n, \\ y, & 2 \nmid n. \end{cases}$$

Vsa taka zaporedja so res praznična, saj lahko izberemo funkcijo

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \mid x - y, \\ 2, & n \nmid x - y. \end{cases}$$

Namreč, če je $i \equiv j \pmod 2$, velja $n \mid a_i - a_j$ za vsak n, prav tako pa $n \mid 0$ za vsak n. Če pa je $i \not\equiv j \pmod 2$, pa velja

$$n \mid a_i - a_j \iff f(n) = 1 \iff f(n) \mid i - j.$$

ii) Če je $a_1 \neq a_3$, je torej tudi $a_{i+2} \neq a_i$ za vsak $i \in \mathbb{N}$. Posebej,

$$a_{i+2} - a_{i+1} \neq a_i - a_{i+1} = -(a_{i+1} - a_i).$$

Ker je $|a_{i+2} - a_{i+1}| = |a_{i+1} - a_i|$, je tako edina možnost

$$a_{i+2} - a_{i+1} = a_{i+1} - a_i$$

za vsak $i \in \mathbb{N}$. Z indukcijo lahko dokažemo, da je

$$a_n = (n-1) \cdot (a_2 - a_1) + a_1.$$

Trdimo, da so tudi ta zaporedja praznična. Naj bo $k = a_2 - a_1$ in $c = a_1$. Izberimo funkcijo $f(n) = \frac{n}{\gcd(n,k)}$. Tedaj res velja

$$n \mid a_i - a_j \iff n \mid (i-j) \cdot k \iff \frac{n}{\gcd(n,k)} \,\Big|\, i - j \iff f(n) \mid i - j.$$