

Priprave na MMO 2026 – 1. domača naloga

1. Danih je 8 različnih naravnih števil, manjših ali enakih 15. Izmed teh izberemo tri pare različnih števil, pri čemer se vsaka dva razlikujeta v vsaj enem številu. Nato na tablo zapišemo absolutno vrednost razlike števil v vsakem izmed teh treh parov. Dokaži, da lahko pare vedno izberemo na tak način, da bodo vsa tri števila na tabli enaka.
2. Na koliko različnih načinov lahko postavimo dve enaki kraljici na različni polji šahovnice velikosti 8×8 tako, da se ne napadata? Kraljici se napadata, če se nahajata v isti vrstici, stolpcu ali diagonalni.
3. Naj bodo j , k in r naravna števila. Določi število načinov, da j ježev, k koz in r rac razporedimo v vrsto, če vemo, da je prvi jež pred prvo raco. Živali iste vrste med seboj ne ločimo.
4. Naj bo n naravno število. Na tekmovanju v besedotvorju je dana abeceda, sestavljena iz n različnih črk. *Beseda* je končno zaporedje črk abecede. Obstaja tudi prazna beseda, to je zaporedje 0 črk. Pravimo, da je beseda a *predpona* besede b , če sta besedi a in b enaki ali lahko besedo b dobimo tako, da na konec besede a dodamo še končno mnogo črk.

Na tekmovanju je sodelovalo končno število tekmovalcev in sodnikov, pri čemer je vsakemu tekmovalcu sodil natanko en sodnik. Vsak tekmovalec in vsak sodnik je izbral eno besedo na tak način, da so bile vse izbrane besede paroma različne. Poleg tega je veljalo naslednje:

- Vsako besedo je ali izbral sodnik ali pa obstaja neka njena predpona, ki jo je izbral tekmovalec.
- Vsaka predpona besede, ki jo je izbral nek sodnik, je beseda, ki jo je prav tako izbral nek sodnik.

Dokaži, da obstaja sodnik, ki je sodil vsaj n tekmovalcem.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **23. 11. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »1. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a

ime in priimek

samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

Podpis:

kraj in datum

Rešitve

1. Izmed 8 različnih naravnih števil lahko par različnih števil izberemo na $\binom{8}{2} = 28$ načinov. Ker so števila manjša ali enaka 15, je absolutna razlika števil v posameznem paru vsaj 1 in največ 14. Imamo torej 14 različnih možnosti. Opazimo, da je absolutna razlika števil v paru enaka 14 le v primeru, ko sta v paru števili 1 in 15, pri ostalih parih pa je absolutna razlika števil v paru največ 13. Ostane torej vsaj 27 različnih parov, za katere imamo 13 različnih možnosti za absolutno razliko števil v paru. Po Dirichletovem principu sledi, da obstajajo vsaj $\left\lceil \frac{27}{13} \right\rceil = 3$ različni pari z enako absolutno razliko števil v paru. Če izberemo te tri pare, bomo torej na tablo napisali tri enaka števila.
2. Ugotovimo najprej, na koliko različnih načinov lahko postavimo dve enaki kraljici na šahovnico tako, da se napadata. Imamo tri možnosti: lahko se nahajata v isti vrstici, stolpcu ali diagonali. Preštejmo najprej vse načine, da dve kraljici postavimo v isto vrstico. Najprej imamo 8 možnosti za izbiro vrstice. Določiti moramo še, v katerih stolpcih bosta. Izmed osmih stolpcev moramo torej izbrati dva, kar lahko naredimo na $\binom{8}{2}$ načinov. Kraljici lahko tako v isto vrstico postavimo na

$$8 \cdot \binom{8}{2} = 224$$

načinov. Simetrično lahko kraljici v isti stolpec prav tako postavimo na 224 načinov. Ostanejo nam le še možnosti, ko sta na isti diagonali. Opazimo, da za vsako naravno število k med 2 in 7 na šahovnici obstajajo natanko štiri diagonale z natanko k polji. Na vsako izmed teh lahko kraljici postavimo na $\binom{k}{2}$ načinov. Ostaneta nam še dve diagonali s po 8 polji. Na vsako izmed teh lahko kraljici postavimo na $\binom{8}{2}$ načinov. Skupaj lahko kraljici na isto diagonalo postavimo na

$$4 \cdot \binom{2}{2} + 4 \cdot \binom{3}{2} + \cdots + 4 \cdot \binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{8}{2} = 280$$

načinov. S tem smo ugotovili, da lahko dve enaki kraljici na šahovnico postavimo na $224 + 224 + 280 = 728$ načinov tako, da se napadata.

Enaki kraljici lahko na šahovnico na poljubni dve polji postavimo na $\binom{64}{2} = 2016$ načinov. Da dobimo število konfiguracij, v katerih se ne napadata, od tega odštejemo vse možnosti, kjer se. Dve enaki kraljici lahko torej na šahovnico razporedimo na

$$2016 - 728 = 1288$$

načinov, da se pri tem ne napadata.

3. V vrsto postavljamo skupaj $j + k + r$ živali. Določimo najprej, na koliko načinov lahko postavimo koze. Izmed $j + k + r$ mest v vrsti lahko k mest za koze izberemo na $\binom{j+k+r}{k}$ načinov. Na preostalih $j + r$ mest bomo razporedili ježe in race. Vemo, da bo prvi jež pred prvo raco, torej mora na prvem izmed teh $j + r$ mest biti jež. Izmed preostalih $j + r - 1$ pa moramo izbrati r mest, na katerih bodo race. To lahko naredimo na $\binom{j+r-1}{r}$ načinov. Ostane nam le še $j - 1$ mest, na katerih morajo biti ježi. Skupaj lahko torej živali razporedimo v vrsto na

$$\binom{j+k+r}{k} \cdot \binom{j+r-1}{r} = \frac{(j+k+r)!}{k! \cdot r! \cdot j!} \cdot \frac{j}{j+r}$$

načinov, da je prvi jež pred prvo raco.

4. Opazimo najprej, da bo na tekmovanju sodeloval vsaj en tekmovalec. Vemo namreč, da bo sodilo le končno mnogo sodnikov, torej bo obstajala beseda, ki je ne bo izbral noben sodnik. Za to bo moralo veljati, da obstaja predpona, ki jo je izbral nek tekmovalec. Ker vsakemu tekmovalcu sodi nek sodnik, bo na tekmovanju sodeloval tudi vsaj en sodnik.

Naj bo beseda *sodniška*, če jo je izbral nek sodnik. Vemo, da je vsaka predpona sodniške besede tudi sodniška. Sledi, da obstaja sodnik, ki je izbral prazno besedo, saj je ta predpona vsake besede.

Naj bo a sodniška beseda. Poglejmo si besedo, ki jo dobimo, če besedi a na konec dodamo eno črko. Naj bo to beseda b . Imamo dve možnosti. Lahko je besedo b izbral nek sodnik ali pa obstaja predpona besede b , ki jo je izbral nek tekmovalec. Predpone besede b pa so ravno predpone besede a in beseda b . Vemo, da je vsako prepono besede a izbral nek sodnik in je zato ni mogel izbrati noben tekmovalec. Če beseda b ni sodniška, jo je torej moral izbrati nek tekmovalec.

Naj bo s število sodnikov na tekmovanju. Oglejmo si vse možne besede, ki jih dobimo tako, da kateri izmed sodniških besed dodamo eno črko. Ni težko videti, da so vse tako pridobljene besede različne, zato jih je natanko $s \cdot n$. Spomnimo, vsaka predpona sodniške besede je prav tako sodniška. Sledi, da lahko med temi sn besedami najdemo vse sodniške besede razen prazne. Izmed sn dobljenih besed je torej $s - 1$ sodniških. Ostalih $sn - (s - 1)$ so morali izbrati tekmovalci. Sledi, da imamo vsaj $sn - (s - 1)$ tekmovalcev. Po Dirichletovem principu torej obstaja sodnik, ki sodi vsaj

$$\left\lceil \frac{sn - (s - 1)}{s} \right\rceil = \left\lceil \frac{s(n - 1) + 1}{s} \right\rceil = n$$

tekmovalcem.