

Priprave na MMO 2025 – 1. domača naloga

1. *Telefonska številka* je poljubno zaporedje $d_1d_2 \cdots d_9$, kjer so d_1, d_2, \dots, d_9 ne nujno različna števila iz množice $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Pravimo, da je telefonska številka *ježeva*, če je zaporedje $d_1d_2d_3d_4$ enako vsaj enemu izmed zaporedij $d_5d_6d_7d_8$ in $d_6d_7d_8d_9$. Koliko je ježevih telefonskih števil?
2. Vsako polje v tabeli velikosti 5×41 je pobarvano z rdečo ali modro barvo. Dokaži, da v tabeli obstajajo takšne tri vrstice in trije stolpci, da je vseh 9 polj, v katerih se sekata katera izmed teh vrstic in stolpcev, enake barve.
3. Dijak od svojega profesorja nekega dne dobi 9 nalog, ki so označene po vrsti glede na težavnost z $1, 2, \dots, 9$, kjer je naloga 1 najlažja in 9 najtežja. Profesor jih čez dan pošilja urejene po težavnosti, začne z najlažjo. Ko ima dijak čas, reši najtežjo izmed do takrat prejetih še nerešenih nalog. Zanima nas, katere izmed nalog bo dijak rešil po kosilu in v kakšnem vrstnem redu, če vemo, da je nalogo 8 že rešil pred kosilom in da bo čez dan rešil vse naloge. Določi število vseh možnih zaporedij nalog, ki jih bo dijak rešil po kosilu.
4. Naj bosta m in n naravni števili, pri čemer je $m \geq n$. Dokaži, da velja

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m-k}{n} \binom{n}{k} = 1.$$

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **17. 11. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) (ime in priimek) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

..... (kraj in datum)

Podpis: