Priprave na MMO 2024 – 2. domača naloga

1. Naj bo BE višina ostrokotnega trikotnika ABC. Premica p se dotika očrtane krožnice trikotnika ABC v točki B. Naj bo F pravokotna projekcija točke C na premico p. Dokaži, da sta EF in AB vzporedni.

2. V ostrokotnem trikotniku ABC sta E in F zaporedoma nožišči višin iz B in C. Naj bo L točka na loku BC očrtane krožnice ABC, ki ne vsebuje A. S K označimo presečišče AL in EF. Naj vzporednica AC skozi F drugič seka očrtano krožnico trikotnika FKB v točki X. Dokaži, da so točke X, L in C kolinearne.

3. V trikotniku ABC je AB najkrajša stranica in velja $\angle ABC \neq 90°$. S H označimo višinsko točko trikotnika ABC. Naj bo ω krožnica s središčem B in polmerom BA. Naj bo D točka, kjer CA drugič seka ω in E točka, kjer ω drugič seka očrtano krožnico trikotnika BCD. S F označimo presečišče premic DE in BH. Dokaži, da je premica BD tangentna na očrtano krožnico trikotnika DFH.

4. S P označimo presečišče diagonal paralelograma $ABCD$, z M pa razpolovišče stranice AB. Naj bo Q presečišče tangente iz A na očrtano krožnico trikotnika MAD in tangente iz B na očrtano krožnico trikotnika MBC. Dokaži, da so Q, M in P kolinearne.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **3. 12. 2023** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius, Citius, Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

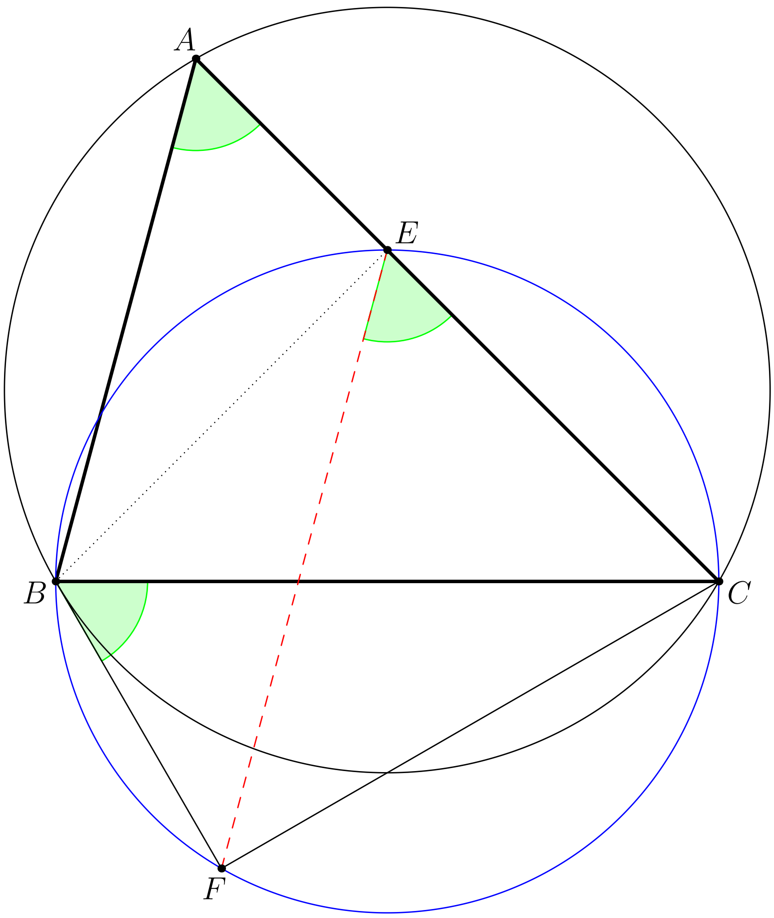
.... (*kraj in datum*) Podpis:

Rešitve

Vse naloge rešujemo z usmerjenimi koti.

1. Ker je BE višina trikotnika ABC, je $\sphericalangle BEC = 90°$. Prav tako je $\sphericalangle BFC = 90°$, saj je F pravokotna projekcija točke C na premico p. Sledi, da so točke B, C, E in F konciklične, zato velja $\sphericalangle FEC = \sphericalangle FBC$.

   Ker je p tangenta na očrtano krožnico trikotnika ABC, je $\sphericalangle FBC = \sphericalangle BAC$. Dobili smo $\sphericalangle FEC = \sphericalangle FBC = \sphericalangle BAC$ in s tem dokazali vzporednost premic AB in EF.[1]



2. Vemo, da so točke B, C, E in F konciklične, saj sta E in F nožišči višin v trikotniku ABC.

   Zaradi konckličnosti točk A, B, C, in L velja

$$\sphericalangle KLB = \sphericalangle ALB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ECB.$$

   Zaradi koncikličnosti točk B, C, E in F velja še

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EFB = \sphericalangle KFB.$$

   Dobili smo $\sphericalangle KLB = \sphericalangle KFB$, torej točka L leži na isti krožnici kot točke B, F, K in X. Z upoštevanjem te koncikličnosti dobimo

$$\sphericalangle XLK = \sphericalangle XFK = \sphericalangle XFE.$$

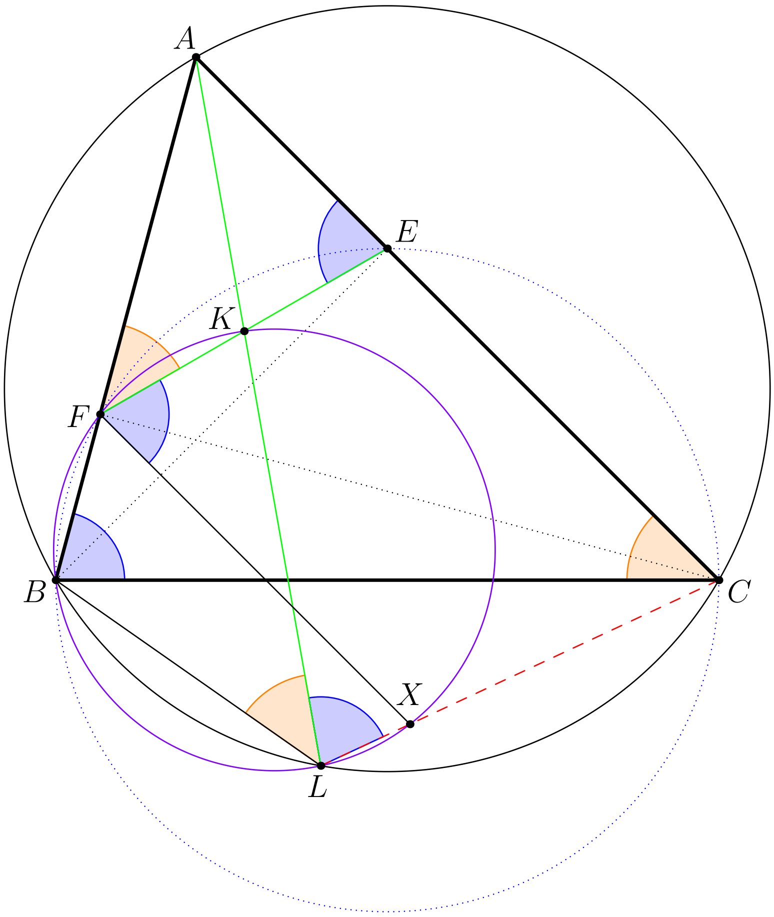
[1] To je pravzaprav izrojen primer Reimovega izreka.

Ker sta premici AC in XF vzporedni, velja $\sphericalangle XFE = \sphericalangle AEF$.

Zaradi koncikličnosti točk B, C, E in F ter koncikličnosti točk A, B, C in L sledi

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle CEF = \sphericalangle CBF = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CLA = \sphericalangle CLK.$$

Dobili smo $\sphericalangle XLK = \sphericalangle CLK$, zato so točke X, L in K res kolinearne.[2]



3. Ker so točke D, E in F kolinearne, je $\sphericalangle FDB = -\sphericalangle BDE$. Ker je B središče očrtane krožnice trikotnika AED, velja $|BA| = |BD| = |BE|$ in posledično $\sphericalangle BDE = \sphericalangle DEB$ ter $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAD$.

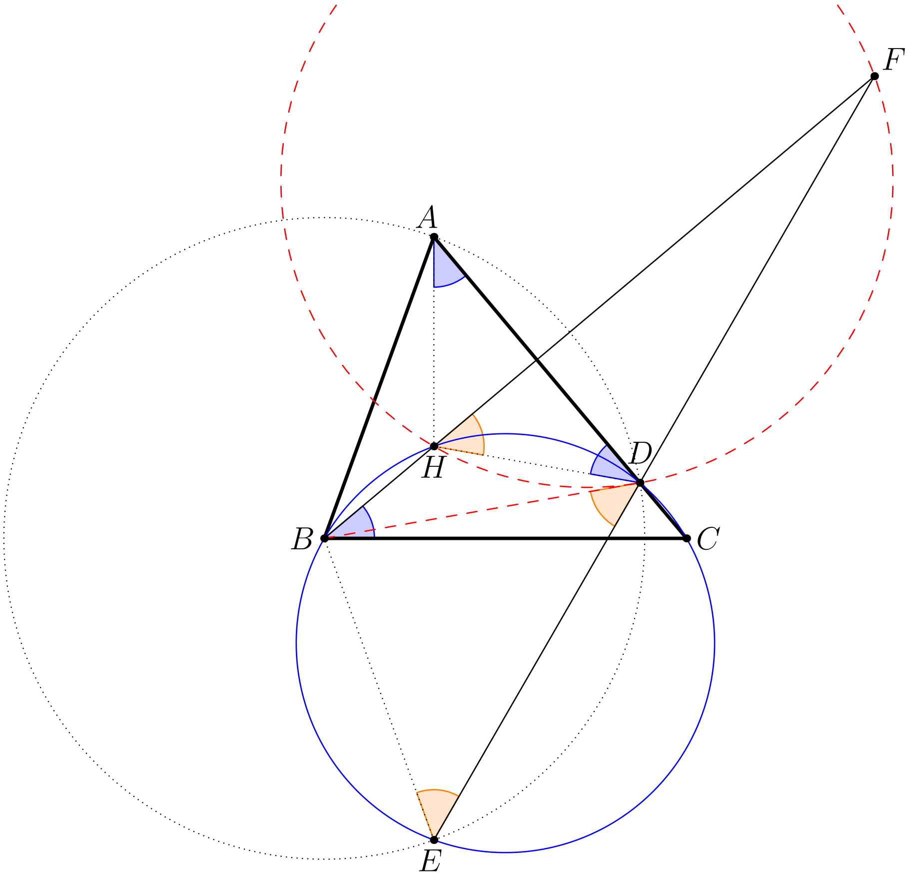
   Ker je BH višina na stranico AC v trikotniku ABC, je BH tudi višina na stranico AD v trikotniku ABD. Trikotnik ABD je enakokrak, zato velja $\sphericalangle ADH = \sphericalangle HAD$. Zaradi znanih koncikličnosti nožišč višin in oglišč trikotnika velja

$$\sphericalangle HDC = \sphericalangle HDA = \sphericalangle DAH = \sphericalangle HBC,$$

   torej so točke B, C, D, in H koneiklične. Na isti krožnici leži tudi točka E, zato velja $\sphericalangle DEB = \sphericalangle DHB = -\sphericalangle BHD$.

   Zaradi prejšnjih enakosti dobimo, da je $\sphericalangle FDB = \sphericalangle BHD$, kar lahko zapišemo kot $\sphericalangle BDF = \sphericalangle DHF$. Po izreku o kotu med tetivo in tangento sledi, da je BD tangenta na očrtano krožnico trikotnika HDF.

[2] Po dokazu koncikličnosti točk B, F, K, X in L kolinearnost sledi tudi iz obrata Reimovega izreka, saj velja $AC \parallel FX$.



4. **1. rešitev:**

Z E označimo presečišče premic DM in BC. Ker je AQ tangenta na očrtano krožnico trikotnika ADM in ker sta premici AD in CE vzporedni, je

$$\sphericalangle QAB = \sphericalangle ADM = \sphericalangle ADE = \sphericalangle CED = \sphericalangle CEM.$$

Prav tako vemo, da je BQ tangenta na očrtano krožnico trikotnika BCM, zato velja

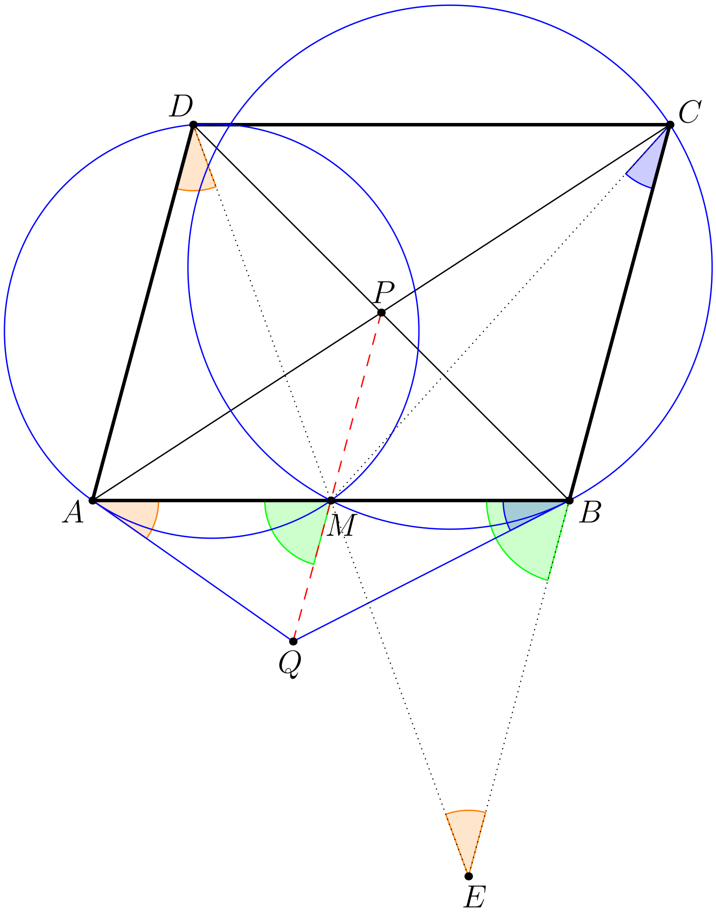
$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle MBQ = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MCE.$$

Iz ugotovitev $\sphericalangle QAB = \sphericalangle CEM$ in $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle MCE$ sledi, da sta trikotnika ABQ in CEM podobna.

Premici AD in BE sta vzporedni in M je razpolovišče daljice AB, zato je štirikotnik $AEBD$ paralelogram. Sledi, da je $|AD| = |BE| = |BC|$. Točka B je torej razpolovišče daljice CE.

Ker sta M in B zaporedoma razpolovišči daljic AB in CE in ker sta trikotnika ABQ in CEM podobna, sta tudi trikotnika AQM in EMB podobna. Od tod dobimo, da je $\sphericalangle AMQ = \sphericalangle MBE$, iz česar sledi, da je premica QM vzporedna premici BC. Prav tako vemo, da je $|AM| = |MB|$ in $|AP| = |PC|$, zato je tudi premica MP vzporedna premici BC.

Premici QM in MP sta torej vzporedni. Ker imata skupno točko, sledi, da točke Q, M in P res ležijo na isti premici.



2. rešitev:

Nalogo rešimo z uporabo fantomske točke. Naj bo Q' presečišče tangente v A na očrtano krožnico trikotnika AMD in premice MP. Dokazati želimo, da je BQ' tangenta na očrtano krožnico trikotnika BCM.

Ker sta M in P zaporedoma razpolovišči stranic AB in DB trikotnika ABD, je MP srednjica tega trikotnika, torej je premica MP vzporedna premici AD in s tem tudi premici BC. Zaradi te vzporednosti dobimo $\sphericalangle AMQ' = \sphericalangle MAD$.

Po izreku o kotu med tetivo in tangento velja $\sphericalangle Q'AM = \sphericalangle ADM$. Sledi, da sta trikotnika $MQ'A$ in AMD podobna. Tako velja

$$\frac{|AD|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MQ'|}.$$

Ker je $ABCD$ paralelogram in M razpolovišče AB, velja $|AD| = |BC|$ in $|AM| = |MB|$. Dobimo

$$\frac{|BC|}{|MB|} = \frac{|AD|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MQ'|} = \frac{|MB|}{|MQ'|}.$$

Ker zaradi vzporednosti $Q'M$ in BC velja tudi $\sphericalangle Q'MB = \sphericalangle CBM$, sledi, da sta trikotnika BCM in MBQ' podobna.

Zaradi podobnosti velja $\sphericalangle MBQ' = \sphericalangle MCB$, zato po izreku o kotu med tetivo in tangento vemo, da je BQ' tangentna na očrtano krožnico trikotnika BCM, torej je $Q' = Q$.