

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2015/16

1. skupina: Poslovna matematika

Četrtek, 10. marec 2016

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

- a) Vinogradnik se je odločil, da bo obiral grozdje na 10 ha vinograda. Ker je bila letina obilna, je najel 27 obiralcev grozdja, ki naj bi delo opravili v 10 dneh, če bi delali po 8 ur na dan. Koliko obiralcev grozdja bi potreboval, da bi bilo delo končano en dan prej, če bi delali po 12 ur na dan, obrati pa bi morali še dodatnih 500 arov sosedovega vinograda?

4 točke

- b) Za pokritje 4 brunaric, ki stojijo na njegovem zemljišču, je potreboval 10.560 kosov opečne strešne kritine z velikostjo 275 mm x 275 mm. Koliko strešnikov velikega formata »Bobrovec« bi potreboval za pokritje 2 brunaric, če je širina strešnika 25 cm, dolžina pa 44 cm?

3 točke

2. naloga

Grosistično podjetje razdeli med pet poslovalnic 2040 kg materiala.

- a) Izračunajte, koliko kg materiala prejmejo poslovalnice A, B in C, če poslovalnica A dobi 12,5 % celotne količine materiala, poslovalnica B 2-krat več kot poslovalnica A, poslovalnica C pa $\frac{1}{12}$ celotne količine materiala?

3 točke

- b) Izračunajte ostanek materiala za poslovalnici D in E.

1 točka

- c) Izračunajte, koliko kg materiala prejme poslovalnica D in koliko kg poslovalnica E, če delitev poteka premo sorazmerno z velikostjo poslovalnice in hkrati obratno sorazmerno z oddaljenostjo od grosističnega skladišča. Podatki v tabeli.

3 točke

Poslovalnica	Velikost (m ²)	Oddaljenost (km)
D	200	2
E	750	5

3. naloga

- a) Če bi se cena nekega blaga povečala 2-krat zapored za 5 %, bi znašala 1.708,88 EUR. Izračunajte prvotno ceno tega blaga.

2 točki

- b) Koliko znaša prodajna cena (PC) in maloprodajna cena (MPC) tega blaga, če je marža (razlika v ceni) 60-odstotna, davek na dodano vrednost (DDV) pa 9,5 %. Osnova za izračun prodajne cene je prvotna cena blaga iz točke a.

3 točke

- c) Izračunajte novo ceno blaga, če se je cena blaga (po dvakratni podražitvi) iz točke a) zmanjšala za 2,5 % in nato povečala za 3,84 EUR.

2 točki

4. naloga

- a) Izposodili smo si 4.000,00 EUR za obdobje od 12. 2. do 12. 9. istega leta. Po kolikšni obrestni meri se bo obrestoval znesek, da se bo povečal za 1,3 %? Sistem štetja dni (K, 366).

4 točke

- b) Koliko bi vrnilo posojilodajalcu, če bi si dolg 4.000,00 EUR izposodili za 23 dni krajše časovno obdobje kot v točki a), obrestna mera pa bi se znižala za 0,2 odstotni točki. Sistem štetja dni (K, 366).

3 točke



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2015/16

2. skupina: Statistika

Četrtek, 10. marec 2016

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Tabela 1: Dijaki po vrstah izobraževanja in spolu v Sloveniji v letu 2013

Vrsta izobraževanja	Spol	
	Moški	Ženske
Nižje poklicno	206	80
Srednje poklicno	2.009	898
Srednje tehniško in drugo strokovno	4.097	3.540
Srednje splošno	2.846	4.274

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte strukturo dijakov po vrstah izobraževanja in jo izrazite v odstotkih (na 1 decimalno mesto natančno).

2 točki

Tabela 2: Struktura dijakov po vrstah izobraževanja v Sloveniji v letu 2013 (v odstotkih)

Vrsta izobraževanja	Spol	
	Moški	Ženske
Nižje poklicno		
Srednje poklicno		
Srednje tehniško in drugo strokovno		
Srednje splošno		
Skupaj		

- b) Izračunajte strukturo dijakov po spolu in jo izrazite v odstotkih (na 1 decimalno mesto natančno).

2 točki

Tabela 3: Struktura dijakov po spolu v Sloveniji v letu 2013 (v odstotkih)

Vrsta izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
Nižje poklicno			
Srednje poklicno			
Srednje tehniško in drugo strokovno			
Srednje splošno			

c) **Dopolnite besedilo oz. podčrtajte pravilne odgovore.**

V nižjem poklicnem izobraževanju je izobraževanje končalo _____ % moških.

Leta 2013 je v srednjem poklicnem izobraževanju zaključilo izobraževanje za _____ odstotnih točk **manj/več** moških kot žensk.

Srednje splošno izobraževanje je zaključilo za _____ odstotnih točk **manj/več** žensk kot srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje.

3 točke

2. NALOGA

Tabela 4: **Število registriranih motornih vozil in število prebivalcev po statističnih regijah v Sloveniji v letu 2014**

Regija	Število registriranih motornih vozil	Št. prebivalcev
Pomurska	83.863	117.133
Podravska	208.879	323.328
Koroška	46.265	71.546
Savinjska	174.152	259.853
Zasavska	24.297	42.983
Spodnjeposavska	51.347	69.958
Jugovzhodna Slovenija	101.017	142.405
Osrednjeslovenska	344.346	546.314
Gorenjska	130.800	203.894
Notranjsko-Kraška	39.401	52.449
Goriška	88.099	118.374
Obalno-Kraška	80.410	112.848

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte število avtomobilov na 100 prebivalcev v Sloveniji za Obalno-kraško in Osrednjeslovensko regijo (*na dve decimalni mesti natančno*). V kateri regiji je bilo večje število avtomobilov na 100 prebivalcev?

3 točke

b) Koliko znaša povprečno število prebivalcev na regijo?

2 točki

c) Za koliko odstotkov je bilo število registriranih vozil na Gorenjskem večje glede na Koroško regijo?

2 točki

3. NALOGA

Za proizvodnjo blaga v tonah podjetja ŠKRAT, d. o. o. so znani naslednji kazalci po letih:

$$K_{2013} = 0,870$$

$$S_{2014} = -0,9 \%$$

$$V_{2015} = 87,0$$

a) Razložite vse tri kazalce.

3 točke

b) Zgoraj navedene kazalce zapišite v tabelo in jo dopolnite z izračunom manjkajočih kazalcev rasti.

3 točke

Tabela 5: Kazalci dinamike za podjetje ŠKRAT, d. o. o.

Leto	Proizvodnja v tonah	V_j	K_j	S_j
2012				
2013				
2014				
2015				

Vir: Izmišljeni podatki

c) Kolikšna je bila proizvodnja leta 2015, če je znašala leta 2012 **700 ton**?

1 točka

4. NALOGA

V novoustanovljenem Fitnes centru v mestu so želeli dobiti podatke o številu obiskovalcev v prvih petdesetih dneh po odprtju. Prešteto število obiskovalcev po dnevih je bilo takšno:

30, 42, 51, 35, 47, 44, 50, 52, 58, 29, 32, 45, 44, 61, 53, 55, 49, 50, 61, 60, 65, 48, 46, 51, 58, 46, 39, 48, 61, 54, 57, 51, 50, 48, 49, 55, 40, 53, 62, 40, 48, 39, 54, 57, 48, 52, 55, 51, 48, 56.

- a) Oblikujte razrede za frekvenčno porazdelitev števila obiskovalcev fitnesa. Pri oblikovanju razredov upoštevajte, da je širina razreda 10. Enote razvrstite po razredih.

2 točkiTabela 6: **Frekvenčna porazdelitev števila obiskovalcev Fitnes centra**

Število obiskovalcev na dan	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0

Vir: izmišljeni podatki

- b) Izračunajte relativne frekvence in kumulativo absolutnih ter kumulativo relativnih frekvenc.

3 točke

- c) Razložite absolutno frekvenco in relativno frekvenco v zadnjem razredu.

2 točki

10. marec 2016

Ime in priimek: _____

Razred: _____ Mentor: _____

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.

Dovoljena je uporaba žepnega računalja. Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

1. V preglednici so zbrani podatki o ceni trojske unče zlata na prve delovne dneve posameznega meseca v letu 2015. Trojska unča je standardna enota za merjenje mase plemenitih kovin in znaša 31,10 grama.

Datum	Cena (EUR)
2. 1. 2015	974,19
2. 2. 2015	1121,79
2. 3. 2015	1083,02
1. 4. 2015	1112,66
1. 5. 2015	1047,85
1. 6. 2015	1101,08
1. 7. 2015	1052,06
3. 8. 2015	995,12
1. 9. 2015	1014,61
1. 10. 2015	998,75
2. 11. 2015	1027,69
1. 12. 2015	1004,38

Vir: World Gold Council

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Izračunaj povprečje objavljenih cen trojske unče zlata. Koliko objavljenih cen je nadpovprečnih in koliko podpovprečnih? [4 točke]

b) Določi variacijski razmik, mediano ter prvi in tretji kvartil objavljenih cen. [6 točk]

c) Na koliko izmed objavljenih dni je cena grama zlata presegala 33 EUR? [4 točke]

d) V katerem četrtnetju leta 2015 je cena zlata dosegla največjo rast in v katerem četrtnetju največji padec? Vse spremembe določi v evrih in odstotkih. Za končno ceno izbranega četrtnetja vzemi začetno ceno naslednjega četrtnetja. Pri tem upoštevaj, da je cena 4. 1. 2016 znašala 1001,67 EUR za trojsko unčo. [6 točk]

2. Konkurenčni banki ponujata polletne depozite z naraščajočo obrestno mero. Depozit se prvi mesec obrestuje po letni obrestni meri 1,5%, naslednja dva meseca po letni obrestni meri 1,8%, zadnje tri mesece pa po letni obrestni meri 2,4%.

Privzemi, da na vsaki od bank vežemo po 1000 EUR.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti, v odstotkih pa na **pet** decimalnih mest.

- a) Banka A pri tem uporablja navadno obrestovanje in ves čas obrestuje le začetno glavnico. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita? [4 točke]

- b) Kolikšna bi morala biti nespremenljiva navadna letna obrestna mera depozita pri banki A, da bi pri vezavi za pol leta dobili enak končni znesek kot v nalogi a)? [4 točke]

- c) Banka B uporablja konformno mesečno obrestovanje. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita? [4 točke]

- d) Kolikšna bi morala biti nespremenljiva letna obrestna mera s konformnim mesečnim obrestovanjem pri banki B, da bi pri vezavi za pol leta dobili enak končni znesek kot v nalogi c)? [4 točke]

- e) Kolikšen znesek bi morali položiti na banko A, da bi ob koncu depozita imeli enak končni znesek kot v banki B v nalogi c)? [4 točke]

3. Naj bo trenutna netvegana efektivna obrestna mera enaka za vsa dospetja, to je $R(0, t) = R$ za vse $t > 0$. Na trgu obstajajo tri obveznice istega izdajatelja. Vse imajo nominalno vrednost 100 EUR in dospetje čez tri leta.

Kuponski obveznici prvi kupon izplačata čez natanko eno leto, zadnjega pa ob dospetju.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Prva obveznica je brezkuponska. Njena trenutna cena je 82,32 EUR. Določi efektivno obrestno mero R . [4 točke]

- b) Druga obveznica je kuponska obveznica z naraščajočimi kuponi. Njen prvi kupon znaša 4 EUR, vsak nadaljnji kupon pa je dvakratnik predhodnega. Določi ceno obveznice. [5 točk]

c) Tretja obveznica je kuponska obveznica s padajočimi kuponi. Njen prvi kupon znaša 14 EUR, vsak nadaljnji kupon pa je polovica predhodnega. Določi ceno obveznice. [5 točk]

d) Pri kolikšni efektivni obrestni meri R bi bili ceni obveznic z naraščajočimi in padajočimi kuponi enaki? [6 točk]

4. Na trgu, na katerem je konstantna netvegana efektivna obrestna mera ves čas enaka 4 %, nastopa delnica A , ki je imela pred natanko enim letom ceno 81 EUR. Analitiki so takrat napovedovali izplačilo dividende v višini 5 EUR čez natanko pol leta. Premija evropske prodajne opcije na to delnico z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR je bila enaka 2,50 EUR.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Kolikšna je bila pred enim letom cena evropske nakupne opcije na delnico A z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR? [5 točk]

- b) Pred enim letom smo kupili dve evropski prodajni opciji na delnico A z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR ter pet evropskih nakupnih opcije na delnico A z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR. Koliko smo plačali za naš portfelj? [2 točki]

- c) Skiciraj graf izplačil portfelja iz c) ob njegovi zapadlosti v odvisnosti od cene delnice A . [5 točk]

d) Danes je cena delnice A enaka 72 EUR. Ali se nam splača katero od opcij izvršiti? Kolikšno je naše izplačilo? Ali bi bilo bolje, da bi pred enim letom denar namesto v opcijski portfelj naložili v banko? [4 točke]

e) Koliko bi morala danes znašati cena delnice A , da bi se nam bolj splačalo denar naložiti v banko. Zapiši interval cen. [4 točke]

List s formulami

Terminski posli

- na delnico brez dividend

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na delnico z dividendo

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t} - I_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na vrednostni papir z znanim donosom

$$F_t = S_t \left(\frac{1 + R}{1 + R_0} \right)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na menjalni tečaj

$$F_t = S_t \left(\frac{1 + R_d}{1 + R_f} \right)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = N(F_t - K)(1 + R_d)^{-(T-t)}$$

$$V_t^1 = (F_t - K)(1 + R_d)^{-(T-t)}$$

- dogovor o terminski obrestni meri

$$K = R(0, S, T) = \frac{1}{T - S} \left(\frac{1 + R(0, T)T}{1 + R(0, S)S} - 1 \right)$$

$$V_t = N(T - S)(R(t, S, T) - K) \cdot \frac{1}{1 + R(t, T)(T - t)}$$

$$V_S = N \cdot (T - S) \cdot (R(S, T) - K) \cdot \frac{1}{1 + R(S, T)(T - S)}$$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}$$

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}$$

- premija v času t , če delnica ne izplačuje dividend

$$\max\{S_t - K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica ne izplačuje dividend

$$p_t + S_t = c_t + K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}.$$

- premija v času t , če delnica izplačuje dividende

$I(t, T)$ je vrednost v času t vseh dividend izplačanih od t do T .

$$\max\{S_t - K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica izplačuje dividende

$$p_t + S_t = c_t + K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} + I(t, T)$$



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2015/16

1. skupina: Poslovna matematika

Četrtek, 10. marec 2016

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

- a) Vinogradnik se je odločil, da bo obiral grozdje na 10 ha vinograda. Ker je bila letina obilna, je najel 27 obiralcev grozdja, ki naj bi delo opravili v 10 dneh, če bi delali po 8 ur na dan. Koliko obiralcev grozdja bi potreboval, da bi bilo delo končano en dan prej, če bi delali po 12 ur na dan, obrati pa bi morali še dodatnih 500 arov sosedovega vinograda?

4 točke

10 ha ↑ 15 ha	27 obiralcev ↑ x obiralcev	10 dni ↓ 9 dni	8 ur/dan ↓ 12 ur/dan

$$X = \frac{27 \times 15 \times 10 \times 8}{10 \times 9 \times 12} = \underline{\underline{30 \text{ obiralcev}}}$$

2 točki – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje) in določitev vrste sorazmerij

1 točka – zapis ulomka

1 točka – rezultat in odgovor

- b) Za pokritje 4 brunaric, ki stojijo na njegovem zemljišču, je potreboval 10.560 kosov opečne strešne kritine z velikostjo 275 mm x 275 mm. Koliko strešnikov velikega formata »Bobrovec« bi potreboval za pokritje 2 brunaric, če je širina strešnika 25 cm, dolžina pa 44 cm?

3 točke

4 brunarice ↑ 2 brunarici	10.560 kosov ↑ x kosov	275 mm (d) ↓ 440 mm (d)	275 mm (š) ↓ 250 mm (š)

$$X = \frac{10560 \times 2 \times 275 \times 275}{4 \times 440 \times 250} = \underline{\underline{3.630 \text{ strešnikov velikega formata}}}$$

1 točka – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje) in določitev vrste sorazmerij

1 točka – zapis ulomka

1 točka – rezultat in odgovor

2. naloga

Grosistično podjetje razdeli med pet poslovalnic 2040 kg materiala.

- a) Izračunajte, koliko kg materiala prejmejo poslovalnice A, B in C, če poslovalnica A dobi 12,5 % celotne količine materiala, poslovalnica B 2-krat več kot poslovalnica A, poslovalnica C pa $\frac{1}{12}$ celotne količine materiala?

3 točke

Poslovalnica	Deleži	Odgovor
A	12,5 % od 2040 kg	<u>255 kg</u>
B	2 x 255	<u>510 kg</u>
C	$\frac{1}{12}$ od 2040 kg	<u>170 kg</u>
Skupaj		935 kg

1 točka izračun količine materiala za poslovalnice A

1 točka izračun količine materiala za poslovalnice B

1 točka izračun količine materiala za poslovalnice C

- b) Izračunajte ostanek materiala za poslovalnici D in E.

1 točka

$$\text{Izračun ostanka: } Q_{(D+E)} = (2040 \text{ kg} - 935 \text{ kg}) = \mathbf{1.105 \text{ kg}}$$

1 točka izračun ostanka

- c) Izračunajte, koliko kg materiala prejme poslovalnica D in koliko kg poslovalnica E, če delitev poteka premo sorazmerno z velikostjo poslovalnice in hkrati obratno sorazmerno z oddaljenostjo od grosističnega skladišča. Podatki v tabeli.

3 točke

Poslovalnica	Velikost (m ²)	Oddaljenost (km)
D	200	2
E	750	5

Poslovalnica	Velikost m ²	Oddaljenost km	ERŠ	Odgovor
D	200	$\frac{1}{2}$	100 x	<u>442 kg</u>
E	750	$\frac{1}{5}$	150 x	<u>663 kg</u>

$$250 x = 1105$$

$$x = \mathbf{4,42}$$

1 točka izračun razmerskih števil

1 točka izračun x

1 točka izračun količine materiala za poslovalnici D in E

3. naloga

- a) Če bi se cena nekega blaga povečala 2-krat zapored za 5 %, bi znašala 1.708,88 EUR. Izračunajte prvotno ceno tega blaga.

2 točki

$$\text{Prvotna cena} = \frac{1.708,88}{1,05 \times 1,05} = \underline{\underline{1.550,00 \text{ EUR}}}$$

- 1 točka – izračun koeficientov in nastavitvev enačbe
1 točka – izračun prvotne cene blaga

- b) Koliko znaša prodajna cena (PC) in maloprodajna cena (MPC) tega blaga, če je marža (razlika v ceni) 60-odstotna, davek na dodano vrednost (DDV) pa 9,5 %. Osnova za izračun prodajne cene je prvotna cena blaga iz točke a.

3 točke

$$\begin{aligned} \text{Prodajna cena (PC)} &= 1550,00 * 1,6 = \underline{\underline{2.480,00 \text{ EUR}}} \\ \text{Maloprodajna cena (MPC)} &= 2.480,00 * 1,095 = \underline{\underline{2.715,60 \text{ EUR}}} \end{aligned}$$

- 1 točka – izračun koeficientov in nastavitvev enačbe
1 točka – izračun PC
1 točka – izračun MPC

- c) Izračunajte novo ceno blaga, če se je cena blaga (po dvakratni podražitvi) iz točke a) zmanjšala za 2,5 % in nato povečala za 3,84 EUR.

2 točki

$$\text{Nova cena} = (1.708,88 * 0,975) + 3,84 = \underline{\underline{1.670,00 \text{ EUR}}}$$

- 1 točka – izračun koeficientov in nastavitvev enačbe
1 točka – izračun nove cene

4. naloga

- a) Izposodili smo si 4.000,00 EUR za obdobje od 12. 2. do 12. 9. istega leta. Po kolikšni obrestni meri se bo obrestoval znesek, da se bo povečal za 1,3 %? Sistem štetja dni (K, 366).

4 točke

$$G = 4.000,00 \text{ EUR}$$

$$d = 213$$

$$o = 52,00 \text{ EUR}$$

$$p = x \%$$

$$o = \frac{G \times p \times d}{36.600}$$

$$p = \frac{o \times 36.600}{G \times d} = \frac{52,00 \times 36.600}{4.000,00 \times 213} = \underline{\underline{2,23 \%}}$$

1 točka – izračun dni

1 točka – izračun obresti

1 točka – izpeljava obrazca in vstavitve podatkov

1 točka – izračun obrestne mere

- b) Koliko bi vrnil posojilodajalcu, če bi si dolg 4.000,00 EUR izposodili za 23 dni krajše časovno obdobje kot v točki a), obrestna mera pa bi se znižala za 0,2 odstotni točki. Sistem štetja dni (K, 366).

3 točke

$$G = 4.000,00 \text{ EUR}$$

$$d = 213 - 23 = \mathbf{190 \text{ dni}}$$

$$p = 2,23 \% - 0,2 \% = \underline{\underline{2,03 \%}}$$

$$G^+ = x \text{ EUR}$$

$$o = \frac{G \times p \times d}{36600} = \frac{4000 \times 2,03 \times 190}{36600} = \underline{\underline{42,15 \text{ EUR}}}$$

$$G^+ = 4.000,00 + 42,15 = \underline{\underline{4.042,15 \text{ EUR}}}$$

1 točka – izračun nove obrestne mere

1 točka – izračun obresti

1 točka – izračun povečane glavnice



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2015/16

2. skupina: Statistika – REŠITVE

Četrtek, 10. marec 2016

Čas pisanja: 12³⁰ do 14⁰⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Tabela 1: Dijaki po vrstah izobraževanja in spolu v Sloveniji v letu 2013

Vrsta izobraževanja	Spol	
	Moški	Ženske
Nižje poklicno	206	80
Srednje poklicno	2.009	898
Srednje tehniško in drugo strokovno	4.097	3.540
Srednje splošno	2.846	4.274

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte strukturo dijakov po vrstah izobraževanja in jo izrazite v odstotkih (na 1 decimalno mesto natančno).

2 točki

Tabela 2: Struktura dijakov po vrstah izobraževanja v Sloveniji v letu 2013 (v odstotkih)

Vrsta izobraževanja	Spol	
	Moški	Ženske
Nižje poklicno	2,2	0,9
Srednje poklicno	22,0	10,2
Srednje tehniško in drugo strokovno	44,7	40,3
Srednje splošno	31,1	48,6
Skupaj	100,0	100,0

2 točki – vsi pravilno izračunani strukturni odstotki
 1 točka – 1 napaka pri izračunanih strukturnih odstotkih
 0 točk – več napak pri izračunanih strukturnih odstotkih

- b) Izračunajte strukturo dijakov po spolu in jo izrazite v odstotkih (na 1 decimalno mesto natančno).

2 točki

Tabela 3: Struktura dijakov po spolu v Sloveniji v letu 2013 (v odstotkih)

Vrsta izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
Nižje poklicno	72,0	28,0	100,0
Srednje poklicno	69,1	30,9	100,0
Srednje tehniško in drugo strokovno	53,6	46,4	100,0
Srednje splošno	40,0	60,0	100,0

- 2 točki – vsi pravilno izračunani strukturni odstotki
- 1 točka – 1 napaka pri izračunanih strukturnih odstotkih
- 0 točk – več napak pri izračunanih strukturnih odstotkih

c) **Dopolnite besedilo oz. podčrtajte pravilne odgovore.**

V nižjem poklicnem izobraževanju je izobraževanje končalo _____ % moških.

Leta 2013 je v srednjem poklicnem izobraževanju zaključilo izobraževanje za _____ odstotnih točk **manj/več** moških kot žensk.

Srednje splošno izobraževanje je zaključilo za _____ odstotnih točk **manj/več** žensk kot srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje.

3 točke

V nižjem poklicnem izobraževanju je izobraževanje končalo **72** % moških.

Leta 2013 je v srednjem poklicnem izobraževanju zaključilo izobraževanje za **38,2** odstotne točke **manj/več** moških kot žensk.

Srednje splošno izobraževanje je zaključilo za **13,6** odstotne točke **manj/več** žensk kot srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje.

Vsak pravilno dopolnjen in podčrtan rezultat je 1 točka, skupaj 3 točke.

2. NALOGA

Tabela 4: Število registriranih motornih vozil in število prebivalcev po statističnih regijah v Sloveniji v letu 2014

Regija	Število registriranih motornih vozil	Št. prebivalcev
Pomurska	83.863	117.133
Podravska	208.879	323.328
Koroška	46.265	71.546
Savinjska	174.152	259.853
Zasavska	24.297	42.983
Spodnjeposavska	51.347	69.958
Jugovzhodna Slovenija	101.017	142.405
Osrednjeslovenska	344.346	546.314
Gorenjska	130.800	203.894
Notranjsko-Kraška	39.401	52.449
Goriška	88.099	118.374
Obalno-Kraška	80.410	112.848

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte število avtomobilov na 100 prebivalcev v Sloveniji za Obalno-kraško in Osrednjeslovensko regijo (*na dve decimalni mesti natančno*). V kateri regiji je bilo večje število avtomobilov na 100 prebivalcev?

3 točke

$K_{\text{Obalno-Kraška regija}} = 71,26$ avtomobilov/100 prebivalcev

$K_{\text{Osrednjeslovenska}} = 63,03$ avtomobilov/100 prebivalcev

Večje število avtomobilov na 100 prebivalcev je bilo v Obalno Kraški regiji.

Vsak pravilen rezultat in ustrezno poimenovan statistični koeficient je 1 točka, skupaj 3 točke

- b) Koliko znaša povprečno število prebivalcev na regijo?

$$\frac{2.061.085}{12} = 171.757,08 \text{ preb. na regijo}$$

2 točki

1 točka – nastavev izračuna, 1 točka – pravilno izračunan koeficient

- c) Za koliko odstotkov je bilo število registriranih vozil na Gorenjskem večje glede na Koroško regijo?

2 točki

$$\frac{130.800}{46.265} = 282,72$$

1 točka – nastavitev izračuna

Število registriranih vozil na Gorenjskem je za 182,72 odstotka večje kot na Koroškem.

1 točka – pravilno izračunan odstotek

3. NALOGA

Za proizvodnjo blaga v tonah podjetja ŠKRAT, d. o. o. so znani naslednji kazalci po letih:

$$K_{2013} = 0,870$$

$$S_{2014} = -0,9 \%$$

$$V_{2015} = 87,0$$

- a) Razložite vse tri kazalce. **3 točke**

Leta 2013 je bila proizvodnja za 13 odstotkov manjša v kot leta 2012.

Leta 2014 je bila proizvodnja za 0,9 % odstotka manjša kot leta 2013.

Leta 2015 je bila proizvodnja za 13 odstotkov manjša v kot leta 2014.

Vsaka pravilna razlaga je 1 točka, skupaj 3 točke.

- b) Zgoraj navedene kazalce zapišite v tabelo in jo dopolnite z izračunom manjkajočih kazalcev rasti. **3 točke**

Tabela 5: Kazalci dinamike za podjetje ŠKRAT, d. o. o.

Leto	Proizvodnja v tonah	V_j	K_j	S_j
2012		/	/	/
2013		87,0	0,870	-13
2014		99,1	0,991	-0,9
2015		87,0	0,870	-13

1 točka – pravilno izračunani V_j

1 točka – pravilno izračunani K_j

1 točka – pravilno izračunane S_j

- c) Kolikšna je bila proizvodnja leta 2015, če je znašala leta 2012 **700 ton**? **1 točka**

Leta 2015 je proizvodnja znašala 525 ton.

1 točka – pravilno izračunana proizvodnja 2015

4. NALOGA



V novoustanovljenem Fitnes centru v mestu so želeli dobiti podatke o številu obiskovalcev v prvih petdesetih dneh po odprtju. Prešteto število obiskovalcev po dnevih je bilo takšno:

30, 42, 51, 35, 47, 44, 50, 52, 58, 29, 32, 45, 44, 61, 53, 55, 49, 50, 61, 60, 65, 48, 46, 51, 58, 46, 39, 48, 61, 54, 57, 51, 50, 48, 49, 55, 40, 53, 62, 40, 48, 39, 54, 57, 48, 52, 55, 51, 48, 56.

- a) Oblikujte razrede za frekvenčno porazdelitev števila obiskovalcev fitnesa. Pri oblikovanju razredov upoštevajte, da je širina razreda 10. Enote razvrstite po razredih.

2 točki

- 1 točka – pravilno opredeljeni (zapisani) razredi
- 1 točka – pravilno izračunane frekvence

- b) Izračunajte relativne frekvence in kumulativo absolutnih ter kumulativo relativnih frekvenc.

3 točke

Tabela 6: Frekvenčna porazdelitev števila obiskovalcev Fitnes centra

Število obiskovalcev na dan	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0
20–29	1	0,020	1	0,020
30–29	5	0,100	6	0,120
40–49	17	0,340	23	0,460
50–59	21	0,420	44	0,880
60–69	6	0,120	50	1,000
SKUPAJ	50	1,000		

Vir: izmišljeni podatki

- 1 točka – pravilno izračunane relativne frekvence
- 1 točka – pravilno izračunane kumulative absolutnih frekvenc
- 1 točka – pravilno izračunane kumulative relativnih frekvenc

- c) Razložite absolutno frekvenco in relativno frekvenco v zadnjem razredu.

2 točki

6 dni je fitnes uporabljalo od 60 do 69 obiskovalcev dnevno.

12 odstotkov opazovanih dni je bilo v fitnesu od 60 do 69 obiskovalcev dnevno.

- 1 točka – pravilno razložena frekvenca
- 1 točka – pravilno razložena relativna frekvenca

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V preglednici so zbrani podatki o ceni trojske unče zlata na prve delovne dneve posameznega meseca v letu 2015. Trojska unča je standardna enota za merjenje mase plemenitih kovin in znaša 31,10 grama.

Datum	Cena (EUR)	Vrstni red
2. 1. 2015	974,19	1.
2. 2. 2015	1121,79	12.
2. 3. 2015	1083,02	9.
1. 4. 2015	1112,66	11.
1. 5. 2015	1047,85	7.
1. 6. 2015	1101,08	10.
1. 7. 2015	1052,06	8.
3. 8. 2015	995,12	2.
1. 9. 2015	1014,61	5.
1. 10. 2015	998,75	3.
2. 11. 2015	1027,69	6.
1. 12. 2015	1004,38	4.

Vir: World Gold Council

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Izračunaj povprečje objavljenih cen trojske unče zlata. Koliko objavljenih cen je nadpovprečnih in koliko podpovprečnih? [4 točke]

Rešitev

Povprečje objavljenih cen za leto 2015 je

$$\mu = \frac{974,19 + \dots + 1004,38}{12} = 1044,43 \text{ EUR.}$$

Nadpovprečnih je 6 objavljenih cen (februar – julij).

Podpovprečnih je 6 objavljenih cen (januar, avgust – december).

Točkovanje

Pravilno izračunano povprečje 2 točki.

Število nadpovprečnih cen 1* točka.

Število podpovprečnih cen 1* točka.

Samo za zapis formule za izračun povprečja damo 1 točko.

- b) Določi variacijski razmik, mediano ter prvi in tretji kvartil objavljenih cen. [6 točk]

Rešitev

Objavljene cene uredimo od najnižje do najvišje, zaporedne številke so pripisane v tabeli. Variacijski razmik je razlika med najvišjo in najnižjo ceno.

$$VR = 1121,79 - 974,19 = 147,60 \text{ EUR}$$

Mediana je povprečje 6. in 7. zaporedne cene.

$$Me = \frac{1027,69 + 1047,85}{2} = 1037,77 \text{ EUR}$$

Prvi kvartil je povprečje 3. in 4. zaporedne cene.

$$Q_1 = \frac{998,75 + 1004,38}{2} = 1001,57 \text{ EUR}$$

Tretji kvartil je povprečje 9. in 10. zaporedne cene.

$$Q_3 = \frac{1083,02 + 1101,08}{2} = 1092,05 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Variacijski razmik 2 točki.

Mediana 2 točki.

Vsak kvartil po 1 točko.

Zapis enot (EUR) ob rezultatih ni potreben.

Samo za urejanje cen brez mediane in kvartilov damo 1 točko.

Za prvi kvartil priznamo katero koli vrednost z intervala [998,75, 1004,38].

Za tretji kvartil priznamo katero koli vrednost z intervala [1083,02, 1101,08].

- c) Na koliko izmed objavljenih dni je cena grama zlata presežala 33 EUR? [4 točke]

Rešitev

Cena 33 EUR za gram zlata je ekvivalentna ceni $33 \cdot 31,10 = 1026,30$ EUR za unčo zlata.

Ta je bila presežena na 7 izmed objavljenih dni (februar – julij, november).

Točkovanje

Cenovna pretvorba med grami in unčami 3 točke.

Število dni 1 točka.

Samo za masno pretvorbo grama v unče damo 1 točko.

- d) V katerem četrletju leta 2015 je cena zlata dosegla največjo rast in v katerem četrletju največji padec? Vse spremembe določi v evrih in odstotkih. Za končno ceno izbranega četrletja vzemi začetno ceno naslednjega četrletja. Pri tem upoštevaj, da je cena 4. 1. 2016 znašala 1001,67 EUR za trojsko unčo. [6 točk]

Rešitev

Absolutne in relativne spremembe po četrtnjih so v spodnji tabeli.

Četrtnje	Absolutna sprememba (EUR)	Relativna sprememba
1. (jan. – mar.)	$1112,66 - 974,19 = 138,47$	$\frac{138,47}{974,19} = 14,21\%$
2. (apr. – jun.)	$1052,06 - 1112,66 = -60,60$	$\frac{-60,60}{1112,66} = -5,45\%$
3. (jul. – sep.)	$998,75 - 1052,06 = -53,31$	$\frac{-53,31}{1052,06} = -5,07\%$
4. (okt. – dec.)	$1001,67 - 998,75 = 2,92$	$\frac{2,92}{998,75} = 0,29\%$

Največja rast v evrih in odstotkih je bila v prvem četrtnju.

Največji padec v evrih in odstotkih je bil drugem četrtnju.

Točkovanje

Pravilne absolutne spremembe 2 točki (za dve pravilni 1 točka).

Pravilne relativne spremembe 2 točki (za dve pravilni 1* točka).*

Določitev največje rasti (pravilna izbira v evrih in odstotkih) 1 točka.

Določitev največjega padca (pravilna izbira v evrih in odstotkih) 1 točka.

2. Konkurenčni banki ponujata polletne depozite z naraščajočo obrestno mero. Depozit se prvi mesec obrestuje po letni obrestni meri 1,5%, naslednja dva meseca po letni obrestni meri 1,8%, zadnje tri mesece pa po letni obrestni meri 2,4%.

Privzemi, da na vsaki od bank vežemo po 1000 EUR.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti, v odstotkih pa na pet decimalnih mest.

- a) Banka A pri tem uporablja navadno obrestovanje in ves čas obrestuje le začetno glavnico. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita? [4 točke]

Rešitev

Trajanja posameznih obrestovanj so $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ in $m_3 = 3$ mesece, obrestne mere so $p_1 = 1,5$, $p_2 = 1,8$ in $p_3 = 2,4$. Začetna glavnica je $G_0 = 1000$ EUR.

Končna glavnica je

$$G_6 = G_0 + o,$$

kjer je znesek obresti

$$o = \frac{G_0 m_1 p_1}{12 \cdot 100} + \frac{G_0 m_2 p_2}{12 \cdot 100} + \frac{G_0 m_3 p_3}{12 \cdot 100} = 10,25 \text{ EUR.}$$

Dobimo $G_6 = 1010,25$ EUR.

Točkovanje

Formula za izračun obresti in končne glavnice pri navadnem obrestovanju 1 točka.

Razumevanje, da je treba sešteti tri ločene zneske obresti iz iste glavnice, 1* točka.

Pravilen znesek obresti za vsaj eno obdobje 1 točka.

Rezultat 1 točka.

Prvo točko damo, tudi če tekmovalec ne upošteva, da se obrestna mera spreminja.

- b) Kolikšna bi morala biti nespremenljiva navadna letna obrestna mera depozita pri banki A, da bi pri vezavi za pol leta dobili enak končni znesek kot v nalogi a)? [4 točke]

Rešitev

Poznamo obresti $o = 10,25$ EUR, začetno glavnico $G_0 = 1000$ EUR in trajanje vezave $m = 6$ mesecev po nespremenljivi obrestni meri p .

Iz enačbe $o = \frac{Gmp}{12 \cdot 100}$ izrazimo $p = \frac{1200o}{Gm} = 2,05$.

Nespremenljiva obrestna mera bi morala biti 2,05%.

Opomba: To je utežena aritmetična sredina naraščajočih obrestnih mer

$$p = \frac{m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Točkovanje

Pravilo nastavljenjena enačba, iz katere je možno izraziti p , 1 točka.

Izrazitev neznanne obrestne mere p 1*+1 točka.

Rezultat 1 točka.

- c) Banka B uporablja konformno mesečno obrestovanje. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita? [4 točke]

Rešitev

Mesečni obrestni faktorji so $r_1 = \sqrt[12]{1 + \frac{p_1}{100}} = \sqrt[12]{1,015}$, $r_2 = \sqrt[12]{1,018}$ in $r_3 = \sqrt[12]{1,024}$.

Končna glavnica je

$$G_6 = G_0 r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3} = 1000 \sqrt[12]{1,015} \sqrt[6]{1,018} \sqrt[4]{1,024} = 1010,19 \text{ EUR.}$$

Točkovanje

Formula za izračun konformnega mesečnega obrestnega faktorja 1 točka.

Formula za izračun končne vrednosti glavnice pri obrestnem obrestovanju 1* točka.

Vsaj en pravilen mesečni obrestni faktor 1 točka.

Rezultat 1 točka.

- d) Kolikšna bi morala biti nespremenljiva letna obrestna mera s konformnim mesečnim obrestovanjem pri banki B, da bi pri vezavi za pol leta dobili enak končni znesek kot v nalogi c)? [4 točke]

Rešitev

Za nespremenljivi mesečni obrestni faktor $r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}}$ velja $G_0 r^6 = G_0 r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3}$.

Iz enačbe $\sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3}$ izrazimo

$$p = 100 \left((r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3})^{12} - 1 \right) = 2,04935.$$

Nespremenljiva obrestna mera bi morala biti 2,04935 %.

Opomba: Faktor r je utežena geometrijska sredina naraščajočih obrestnih faktorjev

$$r = \sqrt[12]{r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3}}.$$

Točkovanje

Pravilo nastavljen enačba, iz katere je možno izraziti r ali p , 1 točka.

Izrazitev neznan obrestne mere p 1*+1 točka.

Rezultat 1 točka.

- e) Kolikšen znesek bi morali položiti na banko A, da bi ob koncu depozita imeli enak končni znesek kot v banki B v nalogi c)? [4 točke]

Rešitev

Uporabimo nespremenljivo obrestno mero $p = 2,05$ in časovno obdobje $m = 6$ mesecev iz naloge b) in končno glavnico $G_6 = 1010,19$ EUR iz naloge c).

Iščemo glavnico G_0 pri kateri je

$$G_0 + \frac{G_0 m p}{12 \cdot 100} = G_0 \left(1 + \frac{m p}{1200} \right) = G_6.$$

Dobimo $G_0 = \frac{G_6}{1 + \frac{m p}{1200}} = 999,94$ EUR.

Točkovanje

Zapis enačbe, iz katere je možno izraziti G_0 , 2 točki.

Rezultat 2 točki.

3. Naj bo trenutna netvegana efektivna obrestna mera enaka za vsa dospetja, to je $R(0, t) = R$ za vse $t > 0$. Na trgu obstajajo tri obveznice istega izdajatelja. Vse imajo nominalno vrednost 100 EUR in dospetje čez tri leta.

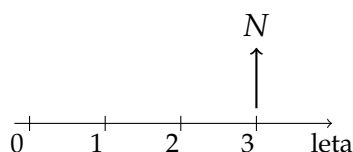
Kuponski obveznici prvi kupon izplačata čez natanko eno leto, zadnjega pa ob dospetju.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Prva obveznica je brezkuponska. Njena trenutna cena je 82,32 EUR. Določi efektivno obrestno mero R . [4 točke]

Rešitev

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



Iz enačbe

$$P_1 = N \cdot D(0, 3) = \frac{N}{(1 + R)^3}$$

dobimo

$$R = \sqrt[3]{\frac{N}{P_1}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{100}{82,32}} - 1 = 0,0670 = 6,70 \%$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Pravilno računanje diskontnega faktorja 1 točka.

Izrazitev R 1* točka.

Obrestna mera 1 točka.

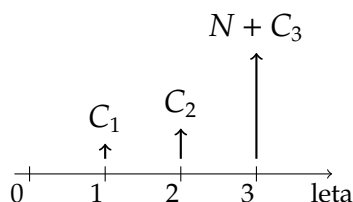
Za pravilno izračunan diskontni faktor $D(0, 3) = 0,8232$ skupaj damo 2 točki.

- b) Druga obveznica je kuponska obveznica z naraščajočimi kuponi. Njen prvi kupon znaša 4 EUR, vsak nadaljnji kupon pa je dvakratnik predhodnega. Določi ceno obveznice. [5 točk]

Rešitev

Prvi kupon je enak $C_1 = 4$ EUR, drugi $C_2 = 8$ EUR, tretji $C_3 = 16$ EUR.

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P_2 = C_1 \cdot D(0,1) + C_2 \cdot D(0,2) + (N + C_3) \cdot D(0,3)$$

$$P_2 = \frac{C_1}{1+R} + \frac{C_2}{(1+R)^2} + \frac{N+C_3}{(1+R)^3}$$

$$P_2 = \frac{4}{1,067} + \frac{8}{1,067^2} + \frac{116}{1,067^3}$$

$$P_2 = 106,27 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Višina kuponov 1 točka.

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1* točka.

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.

Cena obveznice 1 točka.

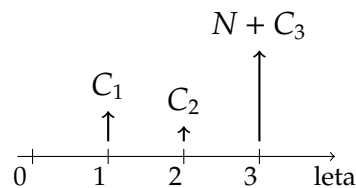
Samo za zapis formule za vrednotenje obveznic damo 1 točko.

- c) Tretja obveznica je kuponska obveznica s padajočimi kuponi. Njen prvi kupon znaša 14 EUR, vsak nadaljnji kupon pa je polovica predhodnega. Določi ceno obveznice. [5 točk]

Rešitev

Prvi kupon je enak $C_1 = 14$ EUR, drugi $C_2 = 7$ EUR, tretji $C_3 = 3,50$ EUR.

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P_3 = C_1 \cdot D(0,1) + C_2 \cdot D(0,2) + (N + C_3) \cdot D(0,3)$$

$$P_3 = \frac{C_1}{1+R} + \frac{C_2}{(1+R)^2} + \frac{N+C_3}{(1+R)^3}$$

$$P_3 = \frac{14}{1,067} + \frac{7}{1,067^2} + \frac{103,5}{1,067^3}$$

$$P_3 = 104,47 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Višina kuponov 1 točka.

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1* točka.

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.

Cena obveznice 1 točka.

Samo za zapis formule za vrednotenje obveznic damo 1 točko.

- d) Pri kolikšni efektivni obrestni meri R bi bili ceni obveznic z naraščajočimi in padajočimi kuponi enaki? [6 točk]

Rešitev

Denarni tokovi obveznic so enaki kot v nalogah b) in c).

Enačenje formul za določanje cen P'_2 in P'_3 nas privede do enačbe

$$\frac{4}{1+R} + \frac{8}{(1+R)^2} + \frac{116}{(1+R)^3} = \frac{14}{1+R} + \frac{7}{(1+R)^2} + \frac{103,5}{(1+R)^3}.$$

Vpeljemo novo neznanko $x = \frac{1}{1+R}$ in dobimo polinomske enačbo

$$\begin{aligned}4x + 8x^2 + 116x^3 &= 14x + 7x^2 + 103,5x^3, \\12,5x^3 + x^2 - 10x &= 0, \\x(12,5x^2 + x - 10) &= 0.\end{aligned}$$

Prva rešitev $x_1 = 0$ ni smiselna.

Kvadratna enačba ima rešitvi $x_2 = \frac{-1+\sqrt{501}}{25} \doteq 0,8553$ in $x_3 = \frac{-1-\sqrt{501}}{25} \doteq -0,9353$.

Smiselna je samo rešitev x_2 . Iz nje dobimo $R = \frac{1}{x} - 1 = 0,1692 = 16,92\%$.

Točkovanje

Pravilno zapisna enačba (razumevanje, kaj je znano in kaj iščemo) 1 točka.

Prevedba na polinomske enačbe 1 točka.

Rešitve polinomske enačbe, vsaka po eno točko, skupaj 3 točke.

Iskana obrestna mera 1 točka.

Dopuščamo zaokrožitvene napake, če tekmovalec zaokroži $x_2 \doteq 0,86$.

4. Na trgu, na katerem je konstantna netvegana efektivna obrestna mera ves čas enaka 4 %, nastopa delnica A , ki je imela pred natanko enim letom ceno 81 EUR. Analitiki so takrat napovedovali izplačilo dividende v višini 5 EUR čez natanko pol leta. Premija evropske prodajne opcije na to delnico z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR je bila enaka 2,50 EUR.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Kolikšna je bila pred enim letom cena evropske nakupne opcije na delnico A z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR? [5 točk]

Rešitev

Zaradi lažjega zapisa čas 0 postavimo na trenutek pred enim letom.

Tedaj so bile znane netvegana obrestna mera $R = 4\%$, cena delnice $S_0 = 81$ EUR, višina dividende $d = 5$ EUR ob času $t = \frac{1}{2}$, zapadlost evropske prodajne opcije $T = 1$, njena izvršilna cena $K = 80$ EUR in premija $p_0 = 2,50$ EUR.

Premijo evropske nakupne opcije dobimo iz paritete evropskih opcij

$$p_0 + S_0 = c_0 + \frac{K}{(1+R)^T} + I(0, T),$$

$$c_0 = p_0 + S_0 - \frac{K}{(1+R)^T} - I(0, T).$$

$I(0, T)$ je sedanja vrednost dividende

$$I(0, T) = \frac{d}{(1+R)^{1/2}}.$$

Dobimo

$$c_0 = 2,5 + 81 - \frac{80}{1,04} - \frac{5}{\sqrt{1,04}} = 1,67 \text{ EUR.}$$

Točkovanje

Ugotovitev, da potrebujemo pariteto, 1 točka.

Sedanja vrednost dividende 1 točka.

Razumevanje količin, ki nastopajo v pariteti, 2 točki.

Rezultat 1 točka.

- b) Pred enim letom smo kupili dve evropski prodajni opciji na delnico A z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR ter pet evropskih nakupnih opcije na delnico A z zapadlostjo eno leto in izvršilno ceno 80 EUR. Koliko smo plačali za naš portfelj? [2 točki]

Rešitev

Seštejemo premije posameznih opcij. Plačali smo $2p_0 + 5c_0 = 2 \cdot 2,5 + 5 \cdot 1,67 = 13,35$ EUR.

Točkovanje

Rezultat 2 točki.*

- c) Skiciraj graf izplačil portfelja iz c) ob njegovi zapadlosti v odvisnosti od cene delnice A. [5 točk]

Rešitev

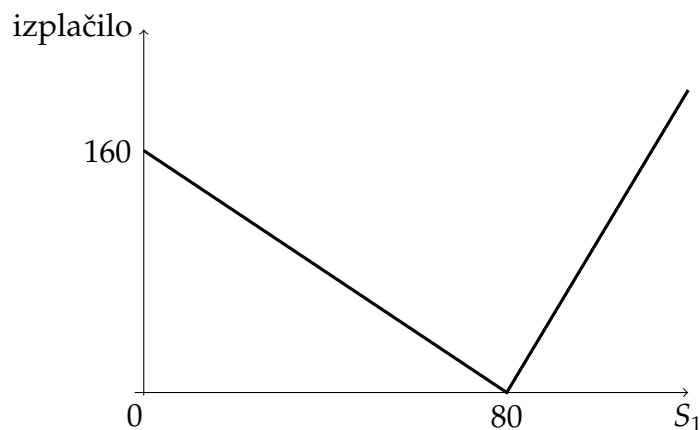
Izplačilo 2 prodajnih opcij ob zapadlosti znaša

$$2 \max\{K - S_1, 0\} = 2 \max\{80 - S_1, 0\} = \begin{cases} 2(80 - S_1); & S_1 < 80 \\ 0; & S_1 \geq 80 \end{cases}$$

Izplačilo 5 nakupnih opcij ob zapadlosti znaša

$$5 \max\{S_1 - K, 0\} = 5 \max\{S_1 - 80, 0\} = \begin{cases} 0; & S_1 < 80 \\ 5(S_1 - 80); & S_1 \geq 80 \end{cases}$$

$$\text{Izplačilo portfelja je } \begin{cases} 2(80 - S_1); & S_1 < 80 \\ 5(S_1 - 80); & S_1 \geq 80 \end{cases}$$



Točkovanje

Na grafu izplačil mora biti razvidno:

- Padajoča linearna funkcija na intervalu $S_1 < 80$; 1 točka.
- Naraščajoča linearna funkcija na intervalu $S_1 > 80$; 1 točka.
- Stičišče v obliki črke V pri ceni $S_1 = 80$, kar je tudi ničla funkcije; 1+1 točka.
- Različnost naklonov (naraščajoča bolj strma) 1 točka.

Risanje v merilu ni potrebno.

- d) Danes je cena delnice A enaka 72 EUR. Ali se nam splača katero od opcij izvršiti? Kolikšno je naše izplačilo? Ali bi bilo bolje, da bi pred enim letom denar namesto v opcijski portfelj naložili v banko? [4 točke]

Rešitev

Označimo $S_1 = 72$ EUR. Splača se izvršiti prodajni opciji.

Izplačilo portfelja je $2(80 - 72) = 16$ EUR.

Če bi začetni znesek 13,35 EUR namesto v opcijski portfelj naložili v banko, bi danes z obrestmi prejeli $13,35 \cdot (1 + R) = 13,35 \cdot 1,04 = 13,88$ EUR, kar je manj od izplačila portfelja.

Opcijski portfelj se je splačal.

Točkovanje

Splača se prodajna opcija 1 točka.

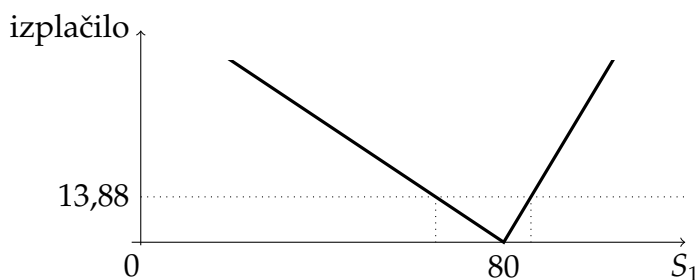
Izplačilo portfelja 1 točka.

Izračun, ki omogoča primerjavo z bančnim računom, 1 točka.

Sklep, da se je opcijski portfelj splačal, 1 točka.

- e) Koliko bi morala danes znašati cena delnice A, da bi se nam bolj splačalo denar naložiti v banko. Zapiši interval cen. [4 točke]

Rešitev



Če je $S_1 < 80$ EUR, izvršimo prodajni opciji. Izplačilo bo manjše od 13,88 EUR, če je

$$2(80 - S_1) < 13,88 \Rightarrow S_1 > 73,06 \text{ EUR.}$$

Če je $S_1 \geq 80$ EUR, izvršimo nakupne opcije. Izplačilo bo manjše od 13,88 EUR, če je

$$5(S_1 - 80) < 13,88 \Rightarrow S_1 < 82,78 \text{ EUR.}$$

Interval cen je $S_1 \in (73,06, 82,78)$.

Točkovanje

Spodnja meja intervala (iz prodajnih opcij) 2 točki.

Zgornja meja intervala (iz nakupnih opcij) 2 točki.

Upoštevamo tudi zaprti interval.