

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU  
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE  
TER STATISTIKE  
za srednje šole**

Šolsko leto 2014/15

**1. skupina: Poslovna matematika**

Četrtek, 12. marec 2015

Čas pisanja: 12<sup>30</sup> do 14<sup>00</sup>

**Navodila kandidatom:**

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					<b>28</b>

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

**1. naloga**

Skupina 10 delavcev je v 12 dneh izkopala jarek, dolg 250 m, širok 100 cm in globok 80 cm. Na dan so kopali po 8 ur in pri tem zaostali za normo za 20 %.

- a) Koliko dni bi kopala jarek dvakrat večjih dimenzij skupina 16 delavcev pri delavniku, ki je za  $\frac{1}{4}$  časa daljši in normi preseženi za  $\frac{1}{5}$ ?

(5 točk)

- b) Koliko dni več oziroma manj rabi za izkop jarka druga skupina v primerjavi s prvo? Izrazite v odstotkih.

(2 točki)

**2. naloga**

V živalskem vrtu razdelijo vsak dan 150 kg hrane: petino štirim medvedom, 45 odstotkov petim odraslim pumam in ostanek štirim levom.

- a) Kako si živali razdelijo hrano, če vsak medvedji mladiček poje 1 kg mesa manj kot odrasel medved, mladička pa sta dva; odrasle pume pojejo vse enako; vsaka od dveh levinj poje dvakrat manj hrane od samcev? Rešitve vpišite v tabelo.

(4 točke)

Št. živali	ŽIVALI V ŽIVALSKEM VRTU					
	Medvedi	q v kg	Pume	q v kg	Levi	q v kg
1	Odrasli medved		Odrasla puma		Samec	
2	Odrasli medved		Odrasla puma		Samec	
3	Medvedji mladič		Odrasla puma		Levinja	
4	Medvedji mladič		Odrasla puma		Levinja	
5	////////////////////	////	Odrasla puma		////////////////////	////////////////////
	Medvedi		Pume		Levi	

- b) Katera od živali poje največ in katera najmanj?

(1 točka)

- c) Za koliko odstotkov več hrane dobijo pume v primerjavi z medvedi?  
Koliko hrane pojedjo pume v petih dneh?

(1 točka)

- d) Ali dobi levinja več hrane kot medvedji mladič? Koliko več ali koliko manj?

(1 točka)

**3. naloga**

Anej in Brina sta imela na začetku visokošolskega študija enaki mesečni štipendiji, vsak po 222,00 EUR. Višina štipendije se jima je povečevala z novim študijskim letom, in sicer Aneju za 8 odstotkov, Brini pa za 25,00 EUR.

a) Kolikšno mesečno štipendijo bo imel Anej po dveh letih?

*(2 točki)*

b) Kateri od njiju bo imel višjo mesečno štipendijo po dveh letih ter za koliko EUR in za koliko odstotkov?

*(3 točke)*

c) Izračunajte vrednost izplačanih štipendij za Aneja in za Brino po treh letih visokošolskega študija?

*(2 točki)*

**4. naloga**

Banka uporablja navadni obrestni račun, dekurzivno obrestovanje in sistem štetja dni (K, 365).

- a) Koliko EUR moramo vložiti v banko 1. aprila, da bi 3. avgusta istega leta lahko dvignili z obrestmi vred 14.572,00 EUR, če banka obrestuje vloge s 4,8 % letno obrestno mero?

*(3 točke)*

- b) Za koliko % bi morala banka povečati obrestno mero, da bi bil dvig glavnice z obrestmi vred 3. avgusta večji za 2,5 %?

*(3 točke)*

- c) Za koliko odstotnih točk bi morala banka povečati obrestno mero, da bi bil dvig glavnice z obrestmi vred 3. avgusta večji za 2,5 %?

*(1 točka)*



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU  
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE  
za srednje šole**

Šolsko leto 2014/15

**2. skupina: Statistika**

Četrtek, 12. marec 2015

Čas pisanja: 12<sup>30</sup> do 14<sup>00</sup>

**Navodila kandidatom:**

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.  
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	<b>Možne točke</b>
					<b>28</b>

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

## 1. NALOGA

Dijaki 4. letnikov Srednje šole »Čebelica« so na šoli izvedli anketo, s katero so želeli ugotoviti način prihoda dijakov v šolo. V ta namen so anketirali dijake 3. in 4. letnika. Rezultati ankete so prikazani v spodnji tabeli.

Tabela 1: **Dijaki Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo in po letnikih izobraževanja 1. septembra 2014**

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš	17	19	36
Z avtobusom	25	26	51
Z avtomobilom	19	28	47
Z vlakom	15	13	28
<b>Skupaj</b>	<b>76</b>	<b>86</b>	<b>162</b>

Vir: Anketa, 1. september 2014

- a) Izračunajte strukturo dijakov po načinu prihoda v šolo za oba letnika izobraževanja na Srednji šoli »Čebelica« in jo izrazite v odstotkih (*na 1 decimalno mesto natančno*).

**3 točke**

Tabela 2: **Struktura dijakov Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo 1. septembra 2014 (v odstotkih)**

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš			
Z avtobusom			
Z avtomobilom			
Z vlakom			
<b>Skupaj</b>			

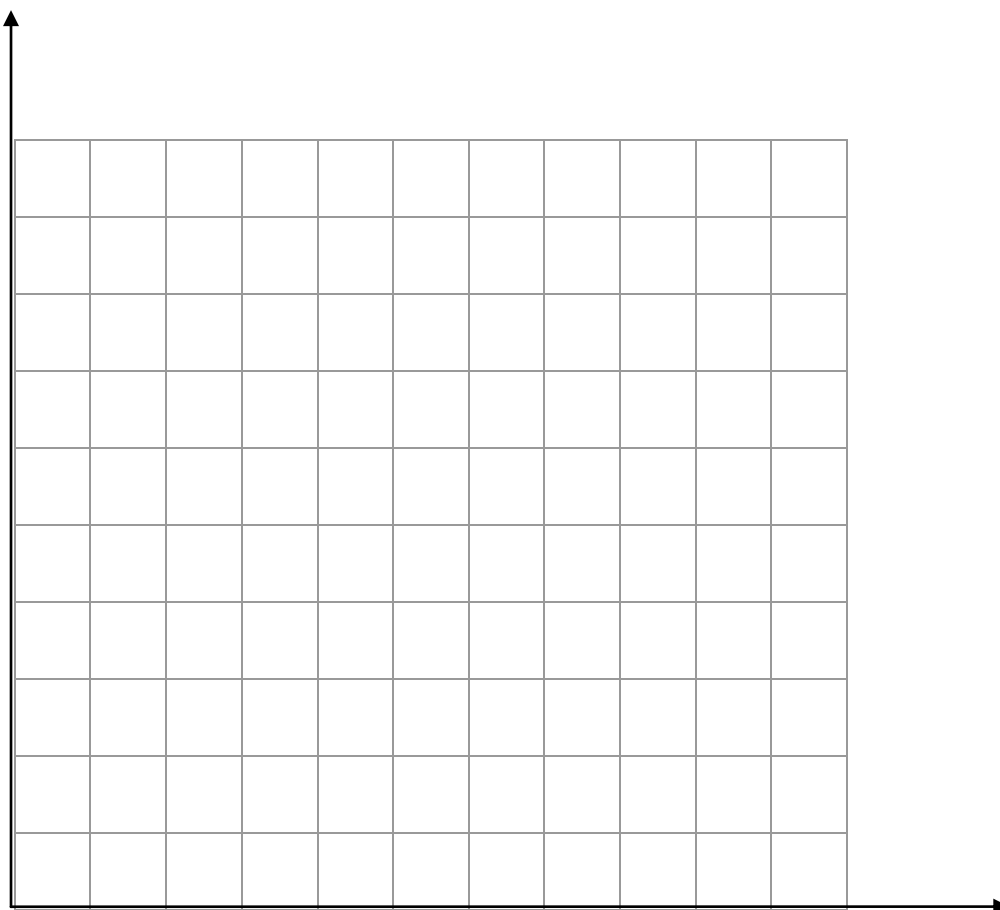
- b) Razložite izračunano strukturo dijakov 3. letnika po načinu prihoda v šolo.

**1 točka**



- c) Strukturo dijakov po načinu prihoda v šolo za oba letnika izobraževanja na Srednji šoli »Čebelica« grafično prikažite s strukturnimi stolpci.

**3 točke**



## 2. NALOGA

Za državo »Koromandijo« imamo dane naslednje podatke o številu podjetij, številu zaposlenih na podjetje in številu upravnih enot (UE) 1. 1. 2014.

Tabela 3: **Število podjetij, število zaposlenih na podjetje in število upravnih enot po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014**

Območje	Število podjetij	Število zaposlenih na podjetje	Število upravnih enot
Hrib	270	88	35
Grič	376	55	43
Gora	144	201	21
Planota	92	89	64

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte število zaposlenih na posameznih območjih. (Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.)

**2 točki**

b) Koliko je bilo zaposlenih na upravno enoto na posameznih območjih? (Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.)

**2 točki**

c) Koliko podjetij pride na eno upravno enoto na vsakem območju? (Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.)

**2 točki**

Tabela 4: **Število zaposlenih, število zaposlenih na upravno enoto in število podjetij na upravno enoto po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014**

Območje	Št. zaposlenih	Št. zaposlenih /UE	Št. Podjetij/UE
Hrib			
Grič			
Gora			
Planota			

- d) Kako bi s koeficientom izrazili, da je v nekem podjetju območja Hrib v določenem času vsak zaposleni ustvaril povprečno 850 EUR dohodka?

**1 točka**

### 3. NALOGA

Tabela 5: **Tujci v Sloveniji v letih od 2010 do 2014**  
(stanje 1.1. v posameznem letu)

Leto	Št. tujcev	Izračunani indeksi
2010	82.316	
2011	82.746	
2012	85.555	
2013	91.385	
2014	96.608	

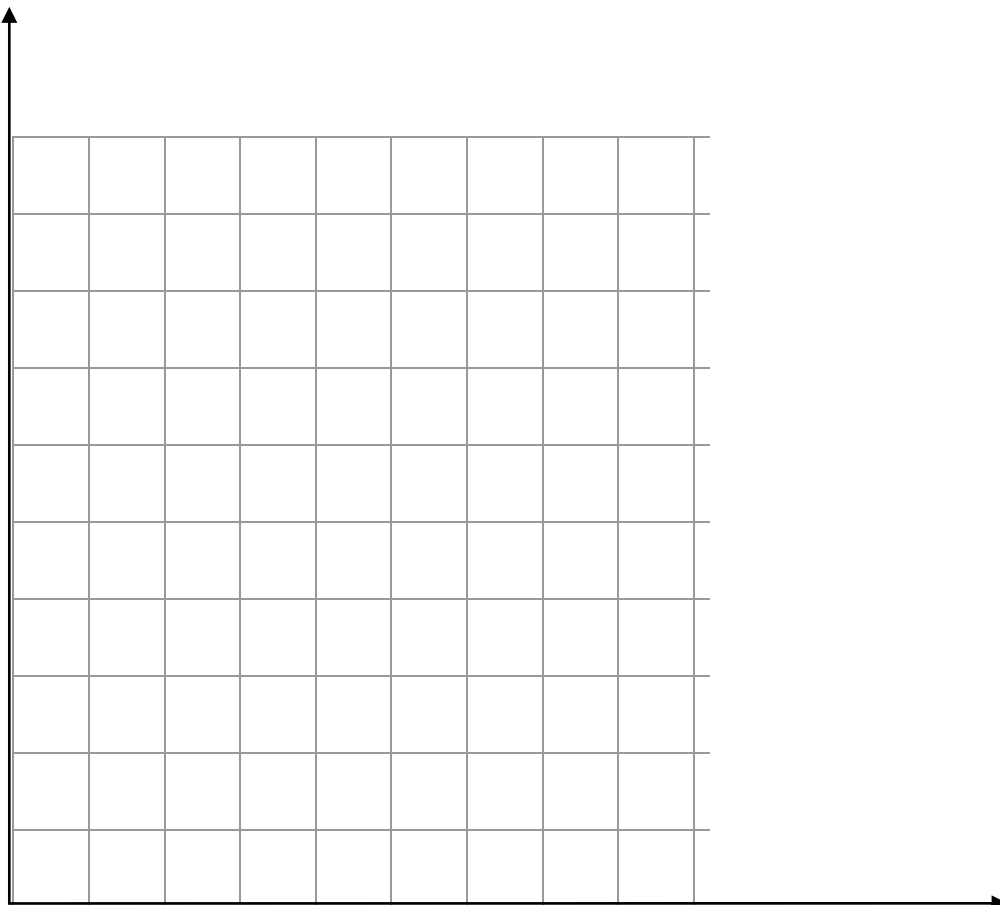
Vir: Statistični urad RS

- a) Z ustreznimi indeksi izračunajte odstotne spremembe tujcev iz leta v leto v Sloveniji. (Rezultate vpišite v tabelo 5 zgoraj)

**2 točki**

- b) Izračunane indekse pod točko a prikažite grafično.

**2 točki**



c) **Dopolnite naslednji stavek.**

Leta 2013 je bilo v Sloveniji 91.385 tujcev, kar je bilo za \_\_\_\_\_ %  
\_\_\_\_\_ kot leta \_\_\_\_\_.

**1 točka**

d) Predvidevamo, da se bo naslednji dve leti število tujcev v Sloveniji vsako leto povečalo za 3 %. Ocenite število tujcev v Sloveniji leta 2016.

**1 točka**

e) Zapišite koeficient rasti za leto 2015, če bi se število tujcev leta 2015 zmanjšalo za 3,5 %.

**1 točka**

#### 4. NALOGA

Za 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica« smo zbrali podatke o telesni masi in jih izrazili v obliki relativnih frekvenc. Podatki so prikazani v tabeli 6.

Tabela 6: **Relativne frekvence za frekvenčno porazdelitev telesnih mas 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica«**

Telesna masa v kg	$f_j^o$	$f_j$	$y_j$	$y_j * f_j$
nad 40 do 50	0,100			
nad 50 do 60	0,250			
nad 60 do 70	0,300			
nad 70 do 80	0,200			
nad 80 do 90	0,100			
nad 90 do 100	0,050			
Skupaj	1,000			

Vir: Prirejeni podatki

- a) Zapišite število dijakov po razredih. (Rezultate vpišite v tabelo 6 zgoraj.) **2 točki**
- b) Izračunajte kumulativno relativne frekvence drugega razreda. **1 točka**
- c) Kaj nam pove izračunana kumulativna relativne frekvence drugega razreda? **1 točka**
- d) Koliko dijakov ima telesno maso nad 60 do 90 kg? **1 točka**
- e) Izračunajte povprečno telesno maso na dijaka. **2 točki**

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Razred: \_\_\_\_\_ Mentor: \_\_\_\_\_

N1	N2	N3	N4

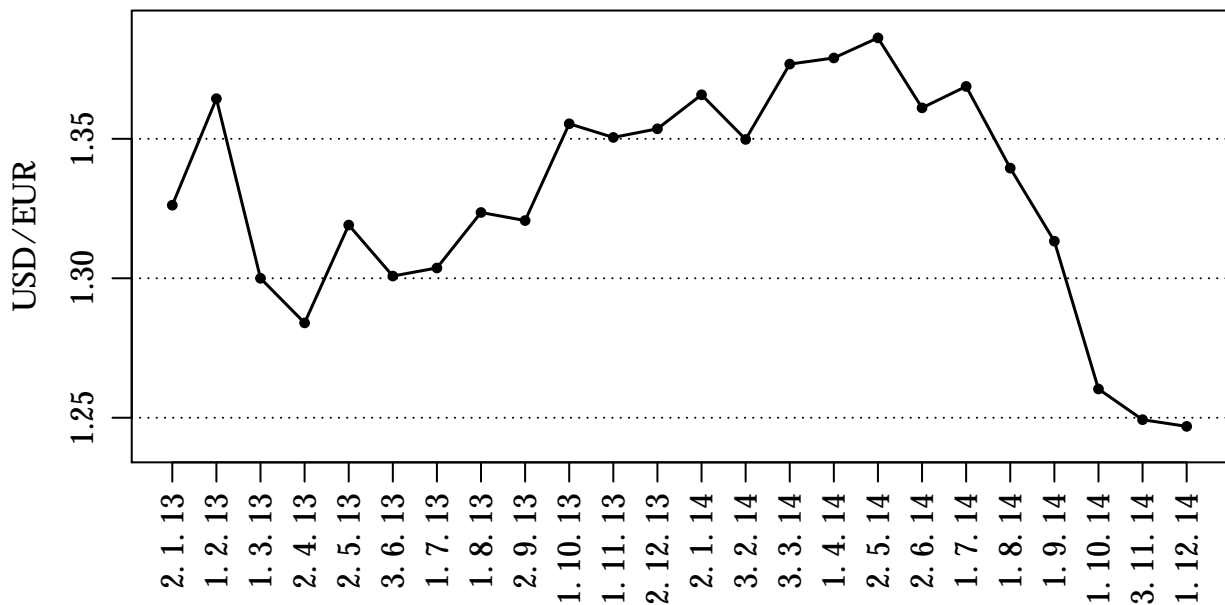
Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.

Dovoljena je uporaba žepnega računalu. Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.

**Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!**

1. Slika in tabela prikazujeta vrednosti referenčnega menjalnega tečaja iz EUR v USD Evropske centralne banke na prve delovne dneve v mesecih od januarja 2013 do decembra 2014.

Referenčni menjalni tečaj Evropske centralne banke



Datum	Menjalni tečaj	Datum	Menjalni tečaj
2. 1. 2013	1,3262	2. 1. 2014	1,3658
1. 2. 2013	1,3644	3. 2. 2014	1,3498
1. 3. 2013	1,3000	3. 3. 2014	1,3768
2. 4. 2013	1,2840	1. 4. 2014	1,3790
2. 5. 2013	1,3191	2. 5. 2014	1,3862
3. 6. 2013	1,3008	2. 6. 2014	1,3611
1. 7. 2013	1,3037	1. 7. 2014	1,3688
1. 8. 2013	1,3236	1. 8. 2014	1,3395
2. 9. 2013	1,3207	1. 9. 2014	1,3133
1. 10. 2013	1,3554	1. 10. 2014	1,2603
1. 11. 2013	1,3505	3. 11. 2014	1,2493
2. 12. 2013	1,3536	1. 12. 2014	1,2469

Vir: Evropska centralna banka

- a) Na kateri dan je bilo 100 EUR vrednih največ ameriških dolarjev? Zapiši datum in vrednost 100 EUR v dolarjih, rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [5 točk]
- b) Na kateri dan je bilo 100 USD vrednih največ evrov? Zapiši datum in vrednost 100 USD v evrih, rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [5 točk]
- c) V katerem mesecu v obdobju od 1. 3. 2013 do 1. 11. 2013 smo zabeležili najvišjo odstotno rast menjalnega tečaja iz EUR v USD? Zapiši oba datuma, takratno (absolutno) spremembo menjalnega tečaja in relativno spremembo menjalnega tečaja v odstotkih. Spremembo v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti. [5 točk]
- d) Izračunaj aritmetično sredino in standardni odklon menjalnih tečajev, podanih za leto 2014. Vrednosti zaokroži na štiri decimalna mesta. [5 točk]



2. Ob nakupu novega avtomobila pri banki najamemo kredit v višini 6000 EUR, ki ga bomo povrnili v 24 enakih mesečnih obrokih. Prvi obrok bomo plačali 6 mesecev po najemu kredita, zadnjega pa dve leti in 5 mesecev po najemu.

Banka uporablja 6 % letno obrestno mero in relativno mesečno obrestovanje.

Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi višino mesečnega obroka.

[14 točk]

- b) Dve leti po nakupu avtomobila želimo predčasno odplačati kredit. Kolikšen znesek moramo tedaj plačati poleg rednega obroka, da bo dolg v celoti poplačan? [6 točk]

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja. Čas  $t$  merimo v letih.

$t$	1	2	3
$R(0, t)$	2,00 %	$R(0, 2)$	3,00 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja. Obe imata nominalno vrednost 100 EUR. Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Prva obveznica je brezkuponska. Njeno dospetje je čez 2 leti, njena trenutna cena pa je 95 EUR. Določi obrestno mero  $R(0, 2)$ . [6 točk]
- b) Druga obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno obrestno mero 4% in dospetjem čez 3 leta. Naslednji kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno kuponske obveznice v času 0. [7 točk]
- c) Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera kuponske obveznice iz b), da bi bila njena cena v času 0 enaka njeni nominalni vrednosti? [7 točk]

4. Cena delnice  $S$  trenutno znaša 10 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pa je 4% za vsa dospetja. Investitor ima v portfelju dve evropski opciji, obe sta napisani na delnico  $S$  in imata zapadlost čez pol leta. Prva opcija je nakupna z izvršilno ceno  $K_1 = 7$  EUR, druga je prodajna z izvršilno ceno  $K_2 = 12$  EUR.

a) Nariši grafa izplačil posamezne opcije ob zapadlosti v odvisnosti od takratne cene delnice.  
[6 točk]

b) Kolikšna bi morala biti cena delnice  $S$  čez pol leta, da bi obe opciji izplačali enak znesek?  
Kolikšno izplačilo bi pri taki ceni pripadalo investitorju?  
[6 točk]

c) Nariši graf izplačil investitorjevega portfelja ob zapadlosti opcij v odvisnosti od takratne cene delnice. [6 točk]

d) Utemelji, zakaj je investitorjev portfelj dveh opcij danes vreden vsaj 4,90 EUR. [2 točki]

# List s formulami

## Terminski posli

- na delnico brez dividend

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na delnico z dividendo

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t} - I_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na vrednostni papir z znanim donosom

$$F_t = S_t \left( \frac{1 + R}{1 + R_0} \right)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na menjalni tečaj

$$F_t = S_t \left( \frac{1 + R_d}{1 + R_f} \right)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = N(F_t - K)(1 + R_d)^{-(T-t)}$$

$$V_t^1 = (F_t - K)(1 + R_d)^{-(T-t)}$$

- dogovor o terminski obrestni meri

$$K = R(0, S, T) = \frac{1}{T - S} \left( \frac{1 + R(0, T)T}{1 + R(0, S)S} - 1 \right)$$

$$V_t = N(T - S)(R(t, S, T) - K) \cdot \frac{1}{1 + R(t, T)(T - t)}$$

$$V_S = N \cdot (T - S) \cdot (R(S, T) - K) \cdot \frac{1}{1 + R(S, T)(T - S)}$$

## Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}$$

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}$$

- premija v času  $t$ , če delnica ne izplačuje dividend

$$\max\{S_t - K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica ne izplačuje dividend

$$p_t + S_t = c_t + K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}.$$

- premija v času  $t$ , če delnica izplačuje dividende

$I(t, T)$  je vrednost v času  $t$  vseh dividend izplačanih od  $t$  do  $T$ .

$$\max\{S_t - K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\} \leq p_t \leq K \cdot (1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica izplačuje dividende

$$p_t + S_t = c_t + K \cdot (1 + R)^{-(T-t)} + I(t, T)$$



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU  
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE  
TER STATISTIKE  
za srednje šole**

Šolsko leto 2014/15

**1. skupina: Poslovna matematika**

Četrtek, 12. marec 2015

Čas pisanja: 12<sup>30</sup> do 14<sup>00</sup>

**Navodila kandidatom:**

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					<b>28</b>

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

### 1. naloga

Skupina 10 delavcev je v 12 dneh izkopala jarek, dolg 250 m, širok 100 cm in globok 80 cm. Na dan so kopali po 8 ur in pri tem zaostali za normo za 20 %.

- a) Koliko dni bi kopala jarek dvakrat večjih dimenzij skupina 16 delavcev pri delavniku, ki je za  $\frac{1}{4}$  časa daljši in normi preseženi za  $\frac{1}{5}$ ?

(5 točk)

10 delavcev	12 dni	250 m(d)	100 cm (š)	80 cm (g)	8 ur	80 %
↓	↑	↑	↑	↑	↓	↓
16 delavcev	x dni	500 m (d)	200 cm š	160 cm (g)	10 ur	120 %

$$x = \frac{12 \times 10 \times 500 \times 200 \times 160 \times 8 \times 80}{16 \times 250 \times 100 \times 80 \times 10 \times 120} = 32 \text{ dni}$$

3 točke – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje) => (6 \* 0,25 točke)  
in določitev vrste sorazmerij (6 \* 0,25 točke)

1 točka – zapis ulomka

1 točka – rezultat in odgovor

- b) Koliko dni več oziroma manj rabi za izkop jarka druga skupina v primerjavi s prvo? Izrazite v odstotkih.

(2 točki)

12 dni	.....	100 %
20 dni	.....	x %

$$x = \frac{20 \times 100}{12} = 166,67\%$$

1 točka – nastavitev (sklepne sheme, enačbe...)

1 točka – izračun in odgovor

## 2. naloga

V živalskem vrtu razdelijo vsak dan 150 kg hrane: petino štirim medvedom, 45 odstotkov petim odraslim pumam in ostanek štirim levom.

a) Kako si živali razdelijo hrano, če vsak medvedji mladiček poje 1 kg mesa manj kot odrasel medved, mladička pa sta dva; odrasle pume pojejo vse enako; vsaka od dveh levinj poje dvakrat manj hrane od samcev? Rešitve vpišite v tabelo.

Rešitev k tč. a)

- $1/5$  od 150 kg = 30 kg za medvede  
 $x + x + (x - 1) + (x - 1) = 30$   
 $x = 8,00$
- 45 % od 150 kg = 67,50 kg za pume  
 Pume: 67,50 kg : 5 = 13,50 kg
- Ostanek: 35 % od 150 kg = 52,50 kg za leve (dva samca + dve levinji)  
 $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = 52,50$   
 $x = 17,50$

Št. živali	ŽIVALI V ŽIVALSKEM VRTU						Točke
	Medvedi	Q v kg	Pume	Q v kg	Levi	Q v kg	
1	Odrasli medved	8,00	Odrasla puma	13,50	Samec	17,50	3 t +
2	Odrasli medved	8,00	Odrasla puma	13,50	Samec	17,50	
3	Medvedji mladič	7,00	Odrasla puma	13,50	Levinja	8,75	
4	Medvedji mladič	7,00	Odrasla puma	13,50	Levinja	8,75	
5	////////////////////	////	Odrasla puma	13,50	////////////////////	////////////////////	
	Medvedi	Σ 30,00	Pume	Σ 67,50	Levi	Σ 52,50	1 t
Σ 150 kg hrane							
Rešitev k točkam b, c in d							
b) Katera od živali poje največ in katera najmanj? Največ hrane poje levji samec (17,50 kg), najmanj pa medvedji mladič (7,00 kg).							1 (2*0,5)
c) Za koliko odstotkov več hrane dobijo pume v primerjavi z medvedi?  <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p>Medvedi 30 kg ..... 100 %</p> <p>Razlika med pumami in medvedi 37,50 kg ..... x %</p> </div> <div style="font-size: 2em;">}</div> <div style="margin-left: 20px;"> <p>x = 125 %</p> </div> </div> <p>Koliko hrane pojedjo pume v petih dneh? Izračun: 37,50 * 5 = 337,50 kg V 5 dneh pojedjo 337,50 kg hrane.</p>							1 t (2*0,5)
d) Ali dobi levinja več hrane kot medvedji mladič? Koliko več ali koliko manj? Odg.: Levinja dobi več hrane kot medvedji mladič, in sicer za 1,75 kg več.							1 t (2*0,5)



### **3. naloga**

Anej in Brina sta imela na začetku visokošolskega študija enaki mesečni štipendiji, vsak po 222,00 EUR. Višina štipendije se jima je povečevala z novim študijskim letom, in sicer Aneju za 8 odstotkov, Brini pa za 25,00 EUR.

a) Kolikšno mesečno štipendijo bo imel Anej po dveh letih?

(2 točki)

Izračun štipendije za Aneja s koeficienti:  $222,00 * 1,08 * 1,08 = \underline{258,94 \text{ EUR}}$

ali po korakih:

za prvo leto:  $222,00 * 1,08 = 239,76 \text{ EUR}$ ; za drugo:  $239,76 * 1,08 = \underline{258,94 \text{ EUR}}$

1 točka – izračun koeficientov in nastavitve enačbe ali izračun štipendije po korakih

1 točka – izračun višine štipendija po dveh letih

b) Kateri od njiju bo imel višjo mesečno štipendijo po dveh letih ter za koliko EUR in za koliko odstotkov?

(3 točke)

Anej: **258,94 EUR**

Brina:  $222,00 + 25,00$  (za prvo leto) +  $25,00$  (za drugo leto) = **272,00 EUR**

Brina ima višjo štipendijo za **13,06 EUR**, kar predstavlja **5,04 %**.

1 točka – izračun mesečne višine štipendije za Brino po dveh letih

1 točka – izračun deleža v EUR

1 točka – izračun v odstotkih

c) Izračunajte vrednost izplačanih štipendij za Aneja in za Brino po treh letih visokošolskega študija?

(2 točki)

$\Sigma$  Anejeve štipendije =  $(222,00 * 12) + (239,76 * 12) + (258,94 * 12) = \underline{8.648,40 \text{ EUR}}$

$\Sigma$  Brinine štipendije =  $(222,00 * 12) + (247 * 12) + (272 * 12) = \underline{8.892,00 \text{ EUR}}$

1 točka – izračun  $\Sigma$  vsote Anejeve štipendije za tri leta

1 točka – izračun  $\Sigma$  vsote Brinine štipendija za tri leta

#### 4. naloga

Banka uporablja navadni obrestni račun, dekurzivno obrestovanje in sistem štetja dni (K, 365).

- a) Koliko EUR moramo vložiti v banko 1. aprila, da bi 3. avgusta istega leta lahko dvignili z obrestmi vred 14.572,00 EUR, če banka obrestuje vloge s 4,8 % letno obrestno mero?

(3 točke)

$$G^+ = 14.572,00$$

$$p = 4,8 \%$$

$$d = 124 \text{ dni}$$

$$G = ?$$

$$G^+ = G + \frac{G \cdot p \cdot d}{36500}$$

$$G = \frac{36500 \cdot G^+}{36500 + p \cdot d} = \underline{\underline{14.338,19}}$$

1 točka – izračun dni

1 točka – nastavitev izračuna glavnice

1 točka – izračun glavnice

- b) Za koliko % bi morala banka povečati obrestno mero, da bi bil dvig glavnice z obrestmi vred 3. avgusta večji za 2,5 %?

(3 točke)

$$G^+ = 14.572,00 \cdot 1,025 = \underline{\underline{14.936,30}}$$

$$p = ? \%$$

$$o = 14936,30 - 14338,19 = \underline{\underline{598,11}}$$

$$p = \frac{36500 \cdot o}{G \cdot d} = \frac{36500 \cdot 598,11}{14338,19 \cdot 124} = \underline{\underline{12,28 \%}}$$

$$4,8 \% \dots\dots\dots 100 \%$$

$$\underline{\underline{7,48 \% \dots\dots\dots x \%}}$$

$$x = \frac{100 \cdot 7,48}{4,8} = \underline{\underline{155,83 \%}}$$

1 točka – izračun  $G^+$

1 točka – izračun obrestne mere

1 točka – izračun % povečanja obrestne mere

- c) Za koliko odstotnih točk bi morala banka povečati obrestno mero, da bi bil dvig glavnice z obrestmi vred 3. avgusta večji za 2,5 %?

(1 točka)

Izračun:  $12,28 \% - 4,8 \% = 7,48$  odstotne točke

1 točka – izračun odstotnih točk



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU  
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE  
za srednje šole**

Šolsko leto 2014/15

**2. skupina: Statistika - REŠITVE**

Četrtek, 12. marec 2015

Čas pisanja: 12<sup>30</sup> do 14<sup>00</sup>

**Navodila kandidatom:**

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.  
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	<b>Možne točke</b>
					<b>28</b>

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

## 1. NALOGA

Dijaki 4. letnikov Srednje šole »Čebelica« so na šoli izvedli anketo, s katero so želeli ugotoviti način prihoda dijakov v šolo. V ta namen so anketirali dijake 3. in 4. letnika. Rezultati ankete so prikazani v spodnji tabeli.

Tabela 1: Dijaki Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo in po letnikih izobraževanja 1. septembra 2014

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš	17	19	36
Z avtobusom	25	26	51
Z avtomobilom	19	28	47
Z vlakom	15	13	28
<b>Skupaj</b>	<b>76</b>	<b>86</b>	<b>162</b>

Vir: Anketa, 1. september 2014

- a) Izračunajte strukturo dijakov po načinu prihoda v šolo za oba letnika izobraževanja na Srednji šoli »Čebelica« in jo izrazite v odstotkih (na 1 decimalno mesto natančno).

**3 točke**

Tabela 2: Struktura dijakov Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo 1. septembra 2014 (v odstotkih)

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš	22,4	22,1	22,2
Z avtobusom	32,9	30,2	31,5
Z avtomobilom	25,0	32,6	29,0
Z vlakom	19,7	15,1	17,3
<b>Skupaj</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>	<b>100,0</b>

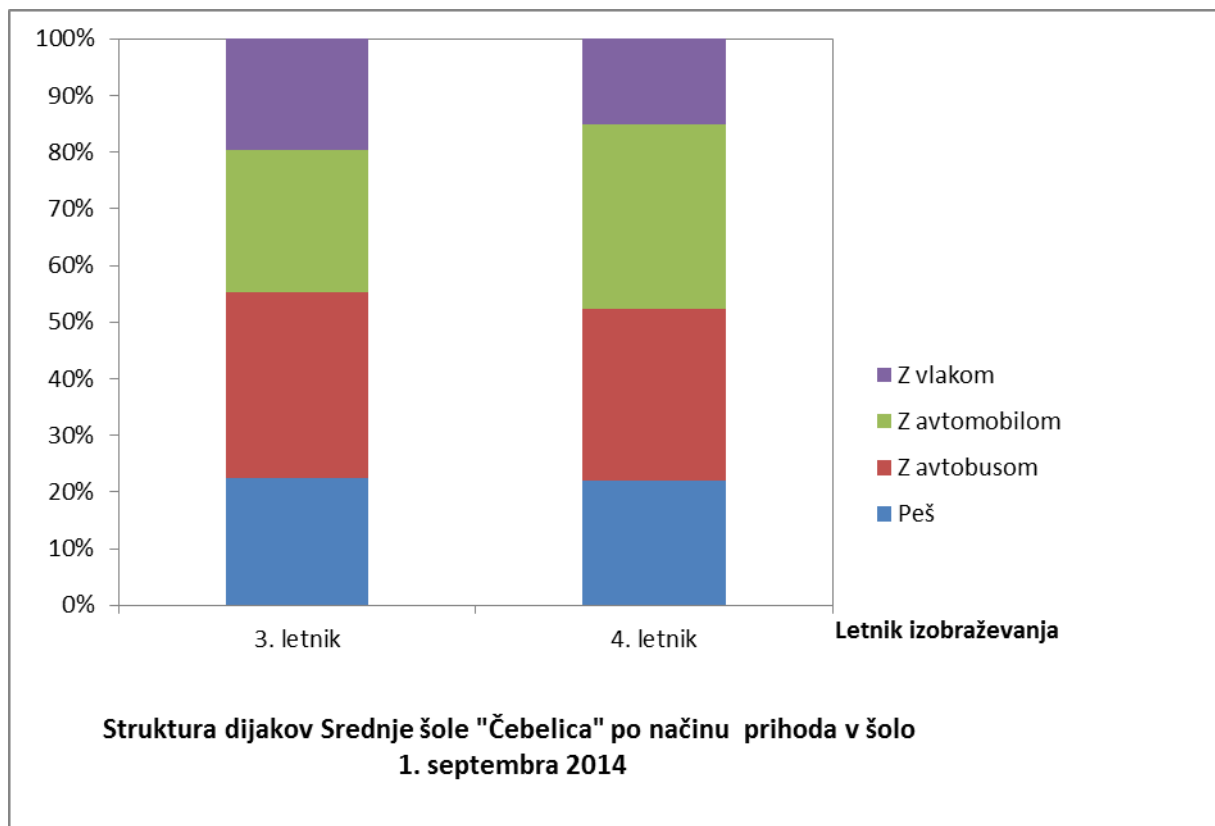
3x1 točka – pravilno izračunani strukturni odstotki za posamezni letnik in skupno število

- b) Razložite izračunano strukturo dijakov 3. letnika po načinu prihoda v šolo.

**1 točka**

**22,4 odstotka dijakov 3. letnika prihaja v šolo peš, 32,9 odstotka dijakov se vozi z avtobusom, 25 odstotkov dijakov se vozi z avtomobilom, 19,7 odstotka dijakov pa se vozi v šolo z vlakom.**

- c) Strukturo dijakov po načinu prihoda v šolo za oba letnika izobraževanja na Srednji šoli »Čebelica« grafično prikažite s strukturnimi stolpci.



1 točka – naslov, legenda, oznake osi

2 točki – pravilno narisana oba strukturna stolpca

## 2. NALOGA

Za državo »Koromandijo« imamo dane naslednje podatke o številu podjetij, številu zaposlenih na podjetje in številu upravnih enot (UE) 1. 1. 2014.

Tabela 3: **Število podjetij, število zaposlenih na podjetje in število upravnih enot po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014**

Območje	Število podjetij	Število zaposlenih na podjetje	Število upravnih enot
Hrib	270	88	35
Grič	376	55	43
Gora	144	201	21
Planota	92	89	64

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte število zaposlenih na posameznih območjih. (Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.)

**2 točki**

0,5 točke za vsako pravilno izračunano število zaposlenih

b) Koliko je bilo zaposlenih na upravno enoto na posameznih območjih? (Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.)

**2 točki**

0,5 točke za vsak pravilno izračunan koeficient

c) Koliko podjetij pride na eno upravno enoto na vsakem območju? (Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.)

**2 točki**

0,5 točke za vsak pravilno izračunan koeficient

Tabela 4: **Število zaposlenih, število zaposlenih na upravno enoto in število podjetij na upravno enoto po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014**

Območje	Št. zaposlenih	Št. zaposlenih /UE	Št. Podjetij/UE
Hrib	23.760	678,86	7,71
Grič	20.680	480,93	8,74
Gora	28.944	1378,29	6,86
Planota	8.188	127,94	1,44

- d) Kako bi s koeficientom izrazili, da je v nekem podjetju območja Hrib v določenem času vsak zaposleni ustvaril povprečno 850 EUR dohodka?

**1 točka**

**$K = 850 \text{ EUR} / 1 \text{ zaposlenega}$**

### 3. NALOGA

Tabela 5: **Tujci v Sloveniji v letih od 2010 do 2014**  
(stanje 1.1. v posameznem letu)

Leto	Št. tujcev	Izračunani indeksi
2010	82.316	-
2011	82.746	100,52
2012	85.555	103,39
2013	91.385	106,81
2014	96.608	105,72

Vir: Statistični urad RS

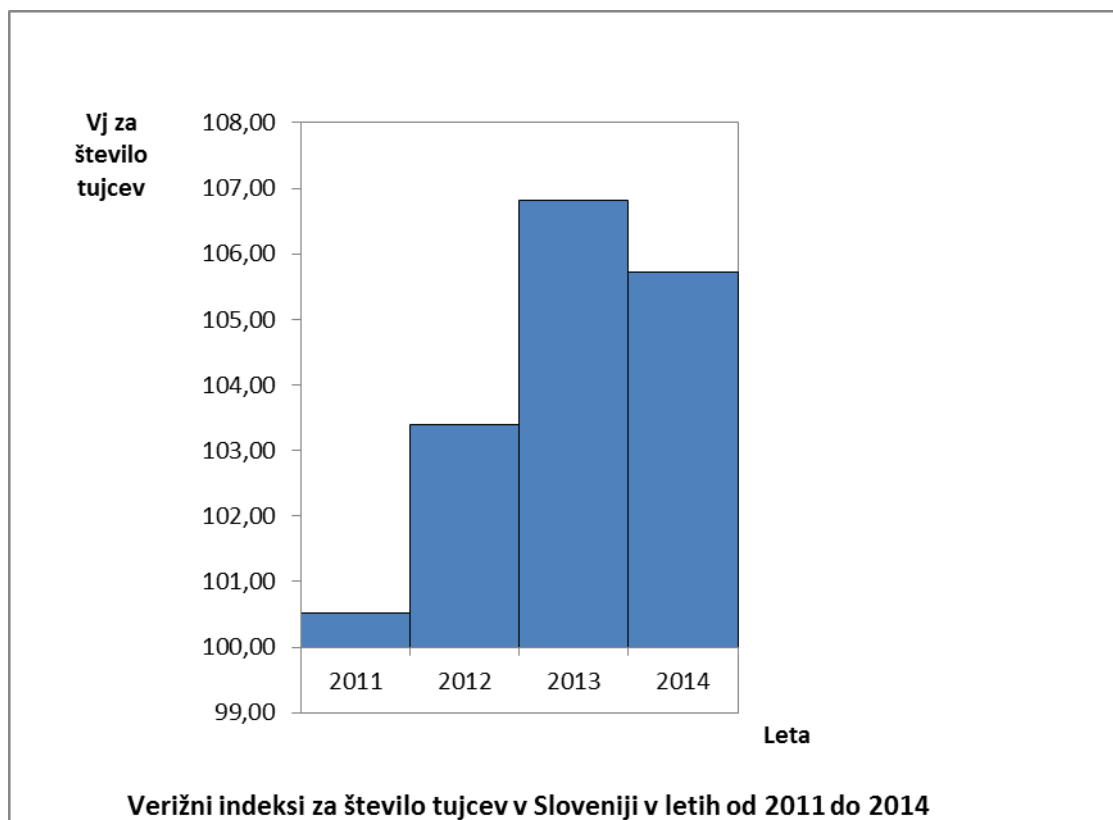
- a) Z ustreznimi indeksi izračunajte odstotne spremembe tujcev iz leta v leto v Sloveniji. (Rezultate vpišite v tabelo 5 zgoraj)

**2 točki**

0,5 točke za vsak pravilno izračunan verižni indeks.

- b) Izračunane indekse pod točko a prikažite grafično.

**2 točki**





1 točka – naslov, legenda, oznake osi

1 točka – pravilno narisane grafikon

c) **Dopolnite naslednji stavek.**

Leta 2013 je bilo v Sloveniji 91.385 tujcev, kar je bilo za **3,39 % več** kot leta **2012**.

**1 točka**

d) Predvidevamo, da se bo naslednji dve leti število tujcev v Sloveniji vsako leto povečalo za 3 %. Ocenite število tujcev v Sloveniji leta 2016.

**1 točka**

**Leta 2016 bi bilo 102.491 tujcev.**

e) Zapišite koeficient rasti za leto 2015, če bi se število tujcev leta 2015 zmanjšalo za 3,5 %.

**1 točka**

$$K_{2015} = (-3,5 + 100) / 100 = 0,965$$

## 4. NALOGA

Za 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica« smo zbrali podatke o telesni masi in jih izrazili v obliki relativnih frekvenc. Podatki so prikazani v tabeli 6.

Tabela 6: **Relativne frekvence za frekvenčno porazdelitev telesnih mas 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica«**

Telesna masa v kg	$f_j^o$	$f_j$	$y_j$	$y_j * f_j$
nad 40 do 50	0,100	8	45	360
nad 50 do 60	0,250	20	55	1100
nad 60 do 70	0,300	24	65	1560
nad 70 do 80	0,200	16	75	1200
nad 80 do 90	0,100	8	85	680
nad 90 do 100	0,050	4	95	380
Skupaj	1,000	80		5280

Vir: Prirejjeni podatki

a) Zapišite število dijakov po razredih. (Rezultate vpišite v tabelo 6 zgoraj)

**2 točki**

1 točka za 3 pravilno izračunane frekvence

b) Izračunajte kumulativo relativne frekvence drugega razreda.

**1 točka**

$$F_2^o = 0,100 + 0,250 = 0,350$$

c) Kaj nam pove izračunana kumulativa relativne frekvence drugega razreda?

**1 točka**

**35 odstotkov dijakov 4. letnika je imelo telesno maso nad 40 do 60 kg.**

d) Koliko dijakov ima telesno maso nad 60 do 90 kg?

**1 točka**

**48 dijakov.**

e) Izračunajte povprečno telesno maso na dijaka.

**2 točki**

$$M = \frac{5280}{80} = 66 \text{ kg}$$

**Povprečna telesna masa dijaka je znašala 66 kg.**

1 točka – pravilno izračunana aritmetična sredina

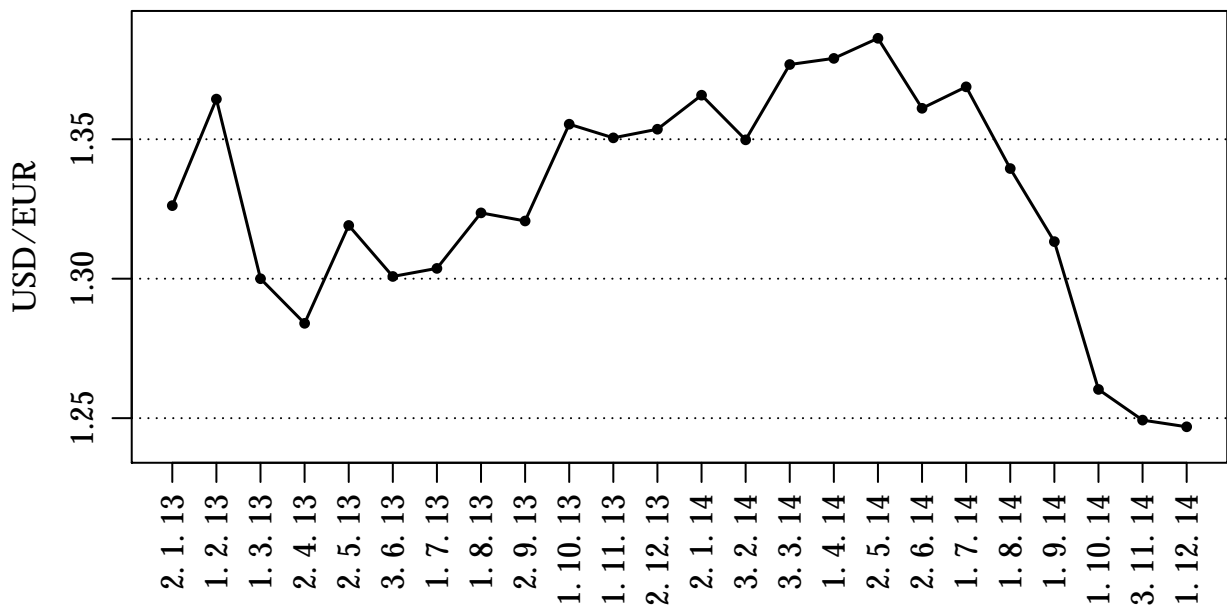
1 točka – pravilno zapisan odgovor oz. razložena aritmetična sredina

## Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. Slika in tabela prikazujeta vrednosti referenčnega menjalnega tečaja iz EUR v USD Evropske centralne banke na prve delovne dneve v mesecih od januarja 2013 do decembra 2014.

Referenčni menjalni tečaj Evropske centralne banke



Datum	Tečaj	Abs. spr.	Rel. spr.	Datum	Tečaj
2. 1. 2013	1,3262			2. 1. 2014	1,3658
1. 2. 2013	1,3644			3. 2. 2014	1,3498
1. 3. 2013	1,3000	-0,0160	-1,23 %	3. 3. 2014	1,3768
2. 4. 2013	1,2840	0,0351	2,73 %	1. 4. 2014	1,3790
2. 5. 2013	1,3191	-0,0183	-1,39 %	2. 5. 2014	1,3862
3. 6. 2013	1,3008	0,0029	0,22 %	2. 6. 2014	1,3611
1. 7. 2013	1,3037	0,0199	1,53 %	1. 7. 2014	1,3688
1. 8. 2013	1,3236	-0,0029	-0,22 %	1. 8. 2014	1,3395
2. 9. 2013	1,3207	0,0347	2,63 %	1. 9. 2014	1,3133
1. 10. 2013	1,3554	-0,0049	-0,36 %	1. 10. 2014	1,2603
1. 11. 2013	1,3505			3. 11. 2014	1,2493
2. 12. 2013	1,3536			1. 12. 2014	1,2469

Vir: Evropska centralna banka

- a) Na kateri dan je bilo 100 EUR vrednih največ ameriških dolarjev? Zapiši datum in vrednost 100 EUR v dolarjih, rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [5 točk]

### Rešitev

Najvišji menjalni tečaj je bil dosežen 2. 5. 2014 in je znašal  $1 \text{ EUR} = 1,3862 \text{ USD}$ .  
100 EUR je bilo vrednih  $100 \cdot 1,3862 = 138,62 \text{ USD}$ .

### Točkovanje

Pravilno določen datum 2 točki.

Uporaba pravega menjalnega tečaja 1 točka.

Pravilno izračunana vrednost 100 EUR 2 točki.

Za množenje napačnega menjalnega tečaja s 100 ne damo točk.

- b) Na kateri dan je bilo 100 USD vrednih največ evrov? Zapiši datum in vrednost 100 USD v evrih, rezultat zaokroži na dve decimalni mesti. [5 točk]

### Rešitev

Iščemo najnižji menjalni tečaj USD/EUR.

Ta je bil dosežen 1. 12. 2014 in je znašal  $1 \text{ EUR} = 1,2469 \text{ USD}$ .

Tedaj je veljalo  $1 \text{ USD} = \frac{1}{1,2469} \text{ EUR}$ . 100 USD je bilo vrednih  $\frac{100}{1,2469} = 80,20 \text{ EUR}$ .

### Točkovanje

Pravilno določen datum 2 točki.

Uporaba pravega menjalnega tečaja 1 točka.

Pravilno izračunana vrednost 100 USD 2 točki.

Za pravi izračun vrednosti 100 USD pri napačni izbiri menjalnega tečaja damo 1 točko.

- c) V katerem mesecu v obdobju od 1. 3. 2013 do 1. 11. 2013 smo zabeležili najvišjo odstotno rast menjalnega tečaja iz EUR v USD? Zapiši oba datuma, takratno (absolutno) spremembo menjalnega tečaja in relativno spremembo menjalnega tečaja v odstotkih. Spremembo v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti. [5 točk]

### Rešitev

Absolutne in relativne spremembe po mesecih so vpisane v tabeli z modro barvo.

Primer izračuna za marec 2013: Absolutna sprememba je odvisna od tečajev 1. 3. 2013 in 2. 4. 2013 in znaša  $1,2840 - 1,3000 = -0,0160$ .

Pripadajoča relativna sprememba za marec 2013 je  $\frac{-0,0160}{1,3000} = -0,0123 = -1,23 \%$ .

Najvišjo odstotno rast menjalnega tečaja smo zabeležili v mesecu aprilu 2013, to je v obdobju med 2. 4. 2013 in 2. 5. 2013. Absolutna sprememba je bila 0,0351, relativna sprememba pa 2,73 %.

### Točkovanje

Pravilna izbira meseca ali navedba obeh datumov 2 točki (pri navedbi samo enega datuma damo 1 točko).

Pravilna absolutna sprememba za mesec april 1 točka.

Pravilna relativna sprememba za mesec april 2 točki.

Če tekmovalec izbere napačen mesec in zanj pravilno izračuna relativno spremembo, damo 2 točki.

- d) Izračunaj aritmetično sredino in standardni odklon menjalnih tečajev, podanih za leto 2014. Vrednosti zaokroži na štiri decimalna mesta. [5 točk]

### Rešitev

Aritmetična sredina menjalnih tečajev za leto 2014 je

$$\mu = \frac{1,3658 + \dots + 1,2469}{12} = 1,333067 = 1,3331.$$

Disperzija je

$$\sigma^2 = \frac{1,3658^2 + \dots + 1,2469^2}{12} - 1,333067^2 = 0,002536.$$

Standardni odklon je

$$\sigma = \sqrt{0,002536} = 0,0504.$$

### Točkovanje

Pravilno izračunana aritmetična sredina 2 točki.

Samo za zapis formule za izračun aritmetične sredine damo 1 točko.

Pravilno izračunana disperzija 2 točki.

Samo za zapis formule za izračun disperzije damo 1 točko.

Standardni odklon 1\* točka.

Dopuščamo manjša odstopanja pri  $\sigma^2$  in  $\sigma$ , ki so posledica zakrožene vrednosti  $\mu$ .

2. Ob nakupu novega avtomobila pri banki najamemo kredit v višini 6000 EUR, ki ga bomo povrnili v 24 enakih mesečnih obrokih. Prvi obrok bomo plačali 6 mesecev po najemu kredita, zadnjega pa dve leti in 5 mesecev po najemu.

Banka uporablja 6 % letno obrestno mero in relativno mesečno obrestovanje.

Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi višino mesečnega obroka.

[14 točk]

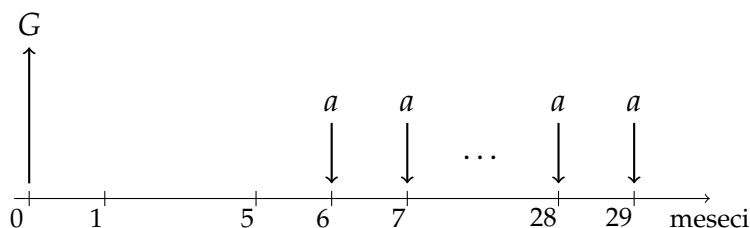
### Rešitev

Glavnica kredita je  $G = 6000$  EUR. Dolg odplačamo s 24 mesečnimi obroki v višini  $a$ .

Prvi obrok plačamo 6 mesecev po najemu kredita, zadnjega 29 mesecev po najemu.

Letna obrestna mera je 6 %, relativni mesečni obrestni faktor je  $r = 1 + \frac{6}{12 \cdot 100} = 1,005$ .

Denarne tokove po mesecih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin je trenutek zadnjega obroka. Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$\begin{aligned} ar^{23} + ar^{22} + \dots + ar + a &= Gr^{29}, \\ a(r^{23} + r^{22} + \dots + r + 1) &= Gr^{29}, \\ a \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1} &= Gr^{29}. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$a = Gr^{29} \cdot \frac{r - 1}{r^{24} - 1} = 6000 \cdot 1,005^{29} \cdot \frac{1,005 - 1}{1,005^{24} - 1} = 272,64 \text{ EUR.}$$

### **Točkovanje**

*Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 3 točke.*

*Mesečni obrestovalni faktor 2 točki.*

*Enačba na osnovi ekvivalence glavnice 2 točki.*

*Vsota geometrijske vrste 2\* točki.*

*Razrešitev enačbe za  $a$  in rezultat 2\*+3 točke.*

*Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.*

- b) Dve leti po nakupu avtomobila želimo predčasno odplačati kredit. Kolikšen znesek moramo tedaj plačati poleg rednega obroka, da bo dolg v celoti poplačan? [6 točk]

### **Rešitev**

Preostalih 5 obrokov je dve leti po najemu kredita vrednih  $x$  EUR.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$\begin{aligned} ar^4 + ar^3 + ar^2 + ar + a &= xr^5, \\ a(r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) &= xr^5, \\ a \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} &= xr^5. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$x = a \cdot \frac{r^5 - 1}{r^5(r - 1)} = 272,64 \cdot \frac{1,005^5 - 1}{1,005^5(1,005 - 1)} = 1342,99 \text{ EUR.}$$

Poleg rednega obroka moramo plačati še 1342,99 EUR.

### **Točkovanje**

*Enačba na osnovi ekvivalence glavnice 2 točki.*

*Vsota geometrijske vrste 1\* točka.*

*Razrešitev enačbe za  $x$  in rezultat 1\*+2 točki.*

*Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.*

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja. Čas  $t$  merimo v letih.

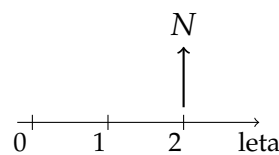
$t$	1	2	3
$R(0, t)$	2,00 %	$R(0, 2)$	3,00 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja. Obe imata nominalno vrednost 100 EUR. Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Prva obveznica je brezakuponska. Njeno dospetje je čez 2 leti, njena trenutna cena pa je 95 EUR. Določi obrestno mero  $R(0, 2)$ . [6 točk]

### Rešitev

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



Iz enačbe

$$P_1 = N \cdot D(0, 2) = \frac{N}{(1 + R(0, 2))^2}$$

dobimo

$$R(0, 2) = \sqrt{\frac{N}{P_1}} - 1 = \sqrt{\frac{100}{95}} - 1 = 0,025978 = 2,60 \%$$

### Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic 1 točka.

Pravilno računanje diskontnega faktorja 1 točka.

Izrazitev  $R(0, 2)$  2\* točki.

Obrestna mera 1 točka.

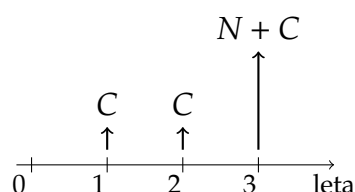
Za pravilno izračunan diskontni faktor  $D(0, 2) = 0,95$  skupaj damo 3 točke.

- b) Druga obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno obrestno mero 4 % in dospetjem čez 3 leta. Naslednji kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno kuponske obveznice v času 0. [7 točk]

### Rešitev

Posamezen kupon je enak  $C = 0,04 \cdot 100 \text{ EUR} = 4 \text{ EUR}$ .

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.





$$P_2 = C \cdot D(0, 1) + C \cdot D(0, 2) + (N + C) \cdot D(0, 3),$$

$$P_2 = \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{C}{(1 + R(0, 2))^2} + \frac{N + C}{(1 + R(0, 3))^3},$$

$$P_2 = \frac{4}{1 + 0,02} + \frac{4}{(1 + 0,026)^2} + \frac{104}{(1 + 0,03)^3},$$

$$P_2 = 102,90 \text{ EUR.}$$

### Točkovanje

Višina letnega kupona 1 točka.

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 2\* točki.

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.

Cena obveznice 1\*+1 točka.

Samo za zapis formule za vrednotenje obveznic damo 1 točko.

- c) Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera kuponske obveznice iz b), da bi bila njena cena v času 0 enaka njeni nominalni vrednosti? [7 točk]

### Rešitev

Cena klasične kuponske obveznice z letnim kuponom  $C'$  je

$$P_3 = \frac{C'}{1 + R(0, 1)} + \frac{C'}{(1 + R(0, 2))^2} + \frac{N + C'}{(1 + R(0, 3))^3}.$$

Ker mora biti cena obveznice enaka njeni nominalni vrednosti ( $P_3 = N = 100 \text{ EUR}$ ), rešujemo enačbo

$$100 = \frac{C'}{1,02} + \frac{C'}{1,026^2} + \frac{100 + C'}{1,03^3}.$$

Dobimo

$$C' \left( \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,026^2} + \frac{1}{1,03^3} \right) = 100 - \frac{100}{1,03^3}$$

oziroma

$$C' = \frac{100 - \frac{100}{1,03^3}}{\frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,026^2} + \frac{1}{1,03^3}} = 2,98 \text{ EUR.}$$

Nominalna obrestna mera obveznice mora biti 2,98 %.

### Točkovanje

Formula za vrednotenje obveznice, usklajena z besedilom naloge ( $P_3 = N$ ), 3 točke.

Izrazitev in izračun višine kupona  $C'$  2\*+1 točka.

Nominalna obrestna mera 1 točka.

Upoštevamo tudi rešitev, ki izhaja iz enakosti  $P_3 = N = 102,90 \text{ EUR}$ . V tem primeru letni kupon znaša  $C' = 3,07 \text{ EUR}$ , nominalna obrestna mera obveznice pa 2,98%.

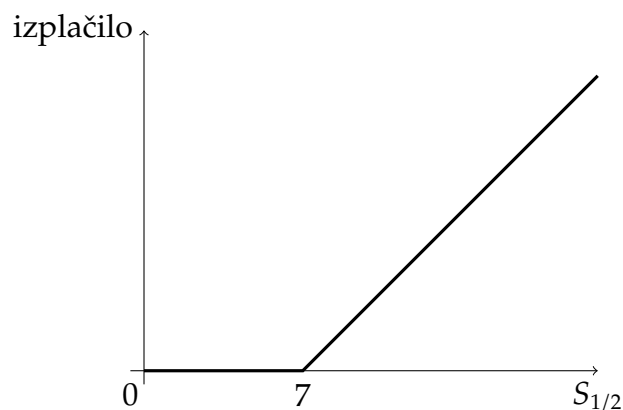
4. Cena delnice  $S$  trenutno znaša 10 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pa je 4% za vsa dospetja. Investitor ima v portfelju dve evropski opciji, obe sta napisani na delnico  $S$  in imata zapadlost čez pol leta. Prva opcija je nakupna z izvršilno ceno  $K_1 = 7$  EUR, druga je prodajna z izvršilno ceno  $K_2 = 12$  EUR.

a) Nariši grafa izplačil posamezne opcije ob zapadlosti v odvisnosti od takratne cene delnice. [6 točk]

### Rešitev

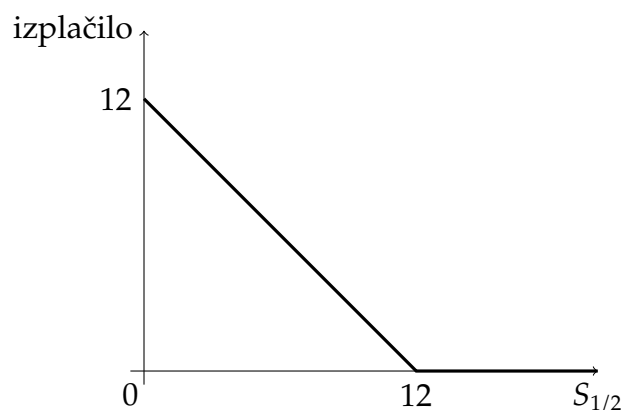
Naj bo  $S_{1/2}$  cena delnice ob zapadlosti opcij. Izplačilo evropske nakupne opcije je

$$\max\{S_{1/2} - K_1, 0\} = \max\{S_{1/2} - 7, 0\} = \begin{cases} S_{1/2} - 7; & S_{1/2} \geq 7 \\ 0; & S_{1/2} < 7 \end{cases}$$



Izplačilo evropske prodajne opcije je

$$\max\{K_2 - S_{1/2}, 0\} = \max\{12 - S_{1/2}, 0\} = \begin{cases} 12 - S_{1/2}; & S_{1/2} \leq 12 \\ 0; & S_{1/2} > 12 \end{cases}$$



### Točkovanje

Za vsak popolnoma pravilen graf z oznakami na oseh 3 točke.

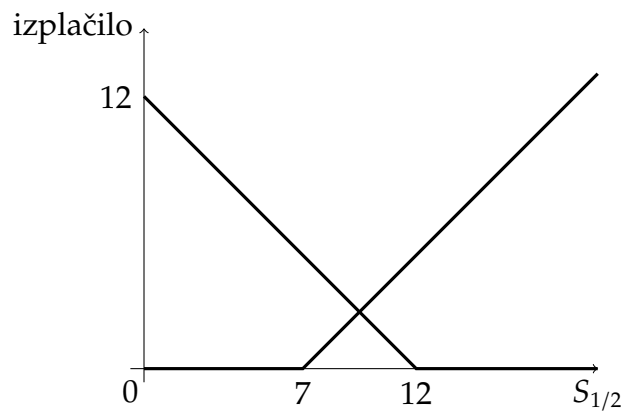
Samo navedba formule za izplačilo z upoštevanjem izvršilne cene 1 točka.

Graf pravilne oblike brez ustreznih oznak na oseh 1 točka.

- b) Kolikšna bi morala biti cena delnice  $S$  čez pol leta, da bi obe opciji izplačali enak znesek? Kolikšno izplačilo bi pri taki ceni pripadalo investitorju? [6 točk]

**Rešitev**

Združimo grafa iz naloge a).



Opazimo, da sta izplačili enaki, če je cena delnice na sredini med izvršilnima cenama,

$$S_{1/2}^* = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{7 + 12}{2} = 9,50 \text{ EUR.}$$

Nakupna opcija pri taki ceni izplača  $\max\{9,50 - 7; 0\} = 2,50$  EUR, prodajna prav tako  $\max\{12 - 9,50; 0\} = 2,50$  EUR. Izplačilo investitorjevega portfelja je 5 EUR.

**Točkovanje**

Pravilna cena delnice 4 točke.

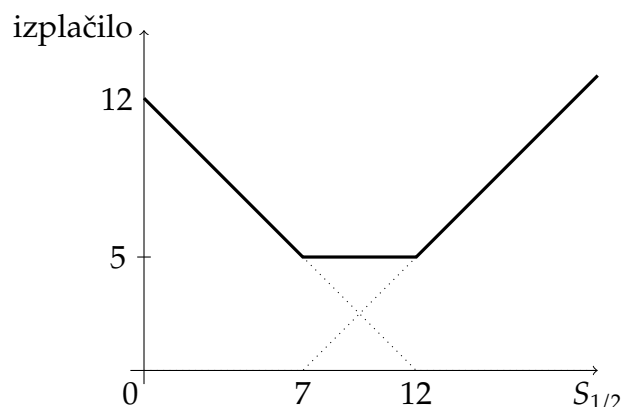
Izplačilo portfelja 1\*+1 točka.

Za idejo, da uporabimo grafa iz a), damo 1\* točko.

- c) Nariši graf izplačil investitorjevega portfelja ob zapadlosti opcij v odvisnosti od takratne cene delnice. [6 točk]

**Rešitev**

Seštejemo grafa iz naloge a).



**Točkovanje**

Za popolnoma pravilen graf z oznakami na oseh 6 točk.

Graf pravilne oblike brez ustreznih oznak na oseh 3 točke.

Za vsoto grafov iz a) damo 2\* točki.

d) Utemelji, zakaj je investitorjev portfelj dveh opcij danes vreden vsaj 4,90 EUR. [2 točki]

**Rešitev**

Ker investitorjev portfelj čez pol leta izplača vsaj 5 EUR, je danes vreden vsaj toliko, kot znaša sedanja vrednost tega zneska. To je

$$5 \cdot D(0, \frac{1}{2}) = \frac{5}{(1 + R)^{1/2}} = \frac{5}{(1 + 0,04)^{1/2}} = 4,9029 > 4,90 \text{ EUR.}$$

**Točkovanje**

*Izračun sedanje vrednosti izplačila 5 EUR 1 točka.*

*Odgovor 1 točka.*