Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

15. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Brežice, 31. marec 2017

Prilepite nalepko s šifro

1. skupina: **Poslovna matematika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

a) Jeseni je bilo v 7 dneh v dolino privedenih 13.300 ovac, ki jih je spremljalo po 5 pastirjev na dan. Koliko ovac je bilo v naslednjih dveh tednih privedenih v dolino, če jih je spremljalo za 20 % več pastirjev kot prej, splošno število ovac pa se je zmanjšalo za 5 %? (1 teden = 7dni)

4 točke

b) Z zalogo hrane, ki so jo imeli na razpolago, so lahko v hlevih dnevno oskrbeli 1.905 ovac. Za koliko ovac bo naslednji dan zadostovala za $\frac{1}{5}$ večja zaloga hrane, če se predvideva za $\frac{1}{10}$ manjša poraba hrane?

3 točke

2. NALOGA

V tovarni zdravil so iz skupnega denarnega sklada v višini 38.000,00 EUR razdelili denarne nagrade petim študentom, in sicer:

a) $\frac{1}{4}$ celotnega sklada premo sorazmerno s povprečno oceno študija:

1. študent Miha ima ocene: 8, 8, 8, 9, 10
2. študent Jernej ima ocene: 9, 9, 9, 9, 10
3. študentka Ana ima ocene: 8, 8, 8, 10, 10
4. študentka Ina ima ocene: 8, 8, 8, 8, 8
5. študent Žan ima ocene: 9, 9, 9, 9, 8

2 točki

b) $\frac{1}{2}$ celotnega denarnega sklada obratno sorazmerno z višino štipendije:

1. študent Miha: 150,00 EUR
2. študent Jernej: 200,00 EUR
3. študentka Ana: 120,00 EUR
4. študentka Ina: 300,00 EUR
5. študent Žan: 300,00 EUR

2 točki

c) Ostanek od celotnega sklada pa so razdelili tako, da je bila podeljena ena prva nagrada, ena druga in tri tretje nagrade za prizadevnost študentov.
Prva nagrada je za 700,00 EUR višja od druge nagrade, tretja nagrada pa je za 20 % nižja kot druga nagrada. Prvo nagrado je prejela Ana, drugo Ina, tretjo nagrado pa so prejeli Žan, Miha in Jernej.

2 točki

Kolikšne skupne nagrade so prejeli posamezni študentje? Napiši odgovor v spodnjo razpredelnico**.**

1 točka

Študent/ka	Kriterij A	Kriterij B	Kriterij C	Skupna nagrada
Miha				
Jernej				
Ana				
Ina				
Žan				
Skupaj				

3. NALOGA

a) V tovarni avtomobilov »Avtek, d. d.« beležijo za leto 2016 povprečno 15-% mesečno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov zaradi zmanjšanja povpraševanja na trgu. Koliko avtomobilov so proizvedli v tem podjetju pred zmanjšanjem proizvodnje, če so danes naredili 370 avtomobilov, današnje zmanjšanje proizvodnje pa je le polovica povprečnega mesečnega zmanjšanja proizvodnje avtomobilov**?**

2 točki

b) V mesecu novembru 2016 so v istem podjetju zabeležili 15,5-% zmanjšanje proizvodnje avtomobilov. 65 % je bilo zmanjšanja proizvodnje zaradi zmanjšanja povpraševanja na domačem trgu, ostalo pa je bilo zmanjšanje povpraševanja na tujem trgu.
Kolikšen je % zmanjšanja proizvodnje zaradi zmanjšanja povpraševanja na domačem trgu in kolikšen je % zaradi zmanjšanja povpraševanja na tujem trgu v tem mesecu**?**

2 točki

c) 15. decembra 2016 so v tem istem podjetju proizvedli 360 avtomobilov rdeče in modre barve. Od teh je bilo 60 % rdečih, 25 % proizvedenih avtomobilov modre barve pa je imelo vgrajeno napravo za parkiranje. Koliko modrih avtomobilov z vgrajeno napravo za parkiranje je bilo proizvedenih ta dan?

2 točki

d) Koliko procentno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov beležijo v tem podjetju na dan 15. december 2016?

1 točka

4. NALOGA

Janez se je odločil varčevati. Na bančni račun je položil 450,00 EUR. Banka obrestuje vloge po 2,5-% letni dekurzivni obrestni meri in letni kapitalizaciji.

a) Koliko denarja bo imel Janez na bančnem računu po 2 letih?

2 točki

b) K privarčevanemu znesku iz naloge a) Janez položi na varčevalni račun še 127,22 EUR. Dekurzivna obrestna mera se zviša za 0,5 odstotne točke. Banka pripisuje obresti mesečno pri relativnem izračunu obrestne mere. Koliko denarja ima Janez na bančnem računu po 5 letih varčevanja?

3 točke

c) Kolikšna bi morala biti letna dekurzivna obrestna mera, da bi se Janezova začetna vloga v 15 letih pri letnem pripisu obresti potrojila?

2 točki

PRAZNA STRAN

15. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Brežice, 31. marec 2017

Prilepite nalepko s šifro

2. skupina: **Statistika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

Imena ljudi se skozi čas spreminjajo. V preteklosti zelo pogosta imena pri nas, kot so Franc, Jožef, Ivan, Anton idr., se danes novorojenčkom skoraj ne podeljujejo več. Ime Marija, ki ga je npr. med leti 1951–1960 v Sloveniji dobilo še 12.498 novorojenk, je med leti 2010–2015 dobilo le 230 novorojenk (Vir: SURS). V zadnjih letih so modna popolnoma drugačna imena. V tabeli so prikazana najpogostejša imena, ki so jih dobili novorojenčki v letu 2015.

Tabela 1: **Najpogostejša imena dečkov in deklic, rojenih v Sloveniji v letu 2015**

	**Ime dečka**	**Število dečkov**	**Ime deklice**	**Število deklic**	**P_j %**
1	Luka	328	Ema	267	
2	Filip	254	Eva	259	
3	Nik	248	Zala	240	
4	Mark	222	Sara	220	
5	Žan	216	Lara	206	
6	Jakob	206	Nika	205	
7	Jaka	191	Julija	200	
8	Žiga	178	Ana	183	
9	David	168	Lana	176	
10	Anže	164	Mia	174	
Skupaj		2175		2130	

a) Izračunajte strukturo **prvih petih najpogostejših** moških imen (Luka, Filip, Nik, Mark, Žan) v letu 2015 v odstotkih in rezultate vpišite v zgornjo tabelo. *(Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)*

2 točki

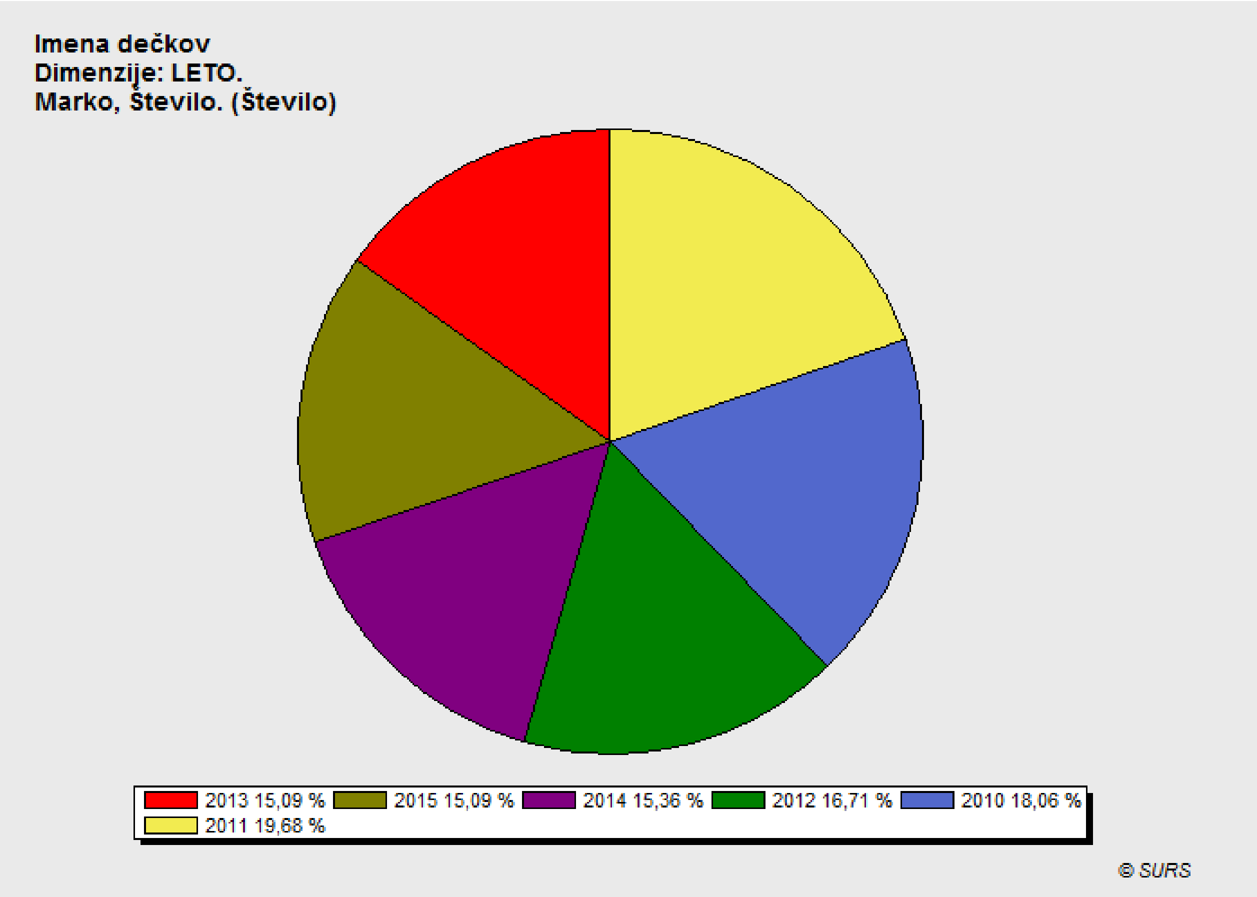
b) Kolikšen je strukturni delež petega najpogostejšega moškega imena med vsemi desetimi moškimi imeni? Kolikšen je strukturni delež petega najpogostejšega ženskega imena med vsemi desetimi ženskimi imeni? *(Rezultate zaokrožite na tri decimalna mesta natančno.)*

- Strukturni delež imena Žan med desetimi moškimi imeni je _______________.
- Strukturni delež imena Lara med desetimi ženskimi imeni je ______________.

2 točki

c) Ali veste, da je moško ime Marko še vedno na skupno 5. mestu med najpogostejšimi imeni v Sloveniji? Po podatkih SURS-a je na dan 1. 1. 2016 živelo pri nas 17.164 oseb s tem imenom (Vir: http://www.stat.si/ImenaRojstva/sl/FirstNames).

Učitelj je dijakom pokazal struktrurni krog števila novorojenčkov, ki so dobili ime Marko v letih od 2010 do 2015.



Slika 1: **Struktura novorojenčkov z imenom Marko v Sloveniji v letih od 2010 do 2015**
(Vir: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp)

d) V spodnjo tabelo vpišite število dečkov z imenom Marko po posameznih letih. Iz tabele je razvidno, da je leta 2010 ime Marko dobilo 67 novorojenčkov. *(Rezultate zaokrožite na cela števila.)*

Tabela 2: **Število živorojenih otrok z imenom Marko v letih od 2010 do 2015**

Leto rojstva	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Število otrok	67					

Vir: SURS

3 točke

2. NALOGA

1. julija 2016 je bila gostota prebivalstva v Sloveniji 101,8 prebivalca na km².

a) Koliko prebivalcev je štela Slovenija na ta dan, če vemo, da je površina države 20.273 km²? *(Rezultat zaokrožite na celo število.)*

2 točki

b) Koliko zdravnikov naj bi imeli v Sloveniji, če odpade približno 2,5 zdravnika na 1000 prebivalcev? *(Rezultat zaokrožite na celo število.)*

1 točka

c) Dolžina državne meje znaša 1.382 km, od tega je 921 km kopenske, izračunane ločne stopinje za prikaz s krogom predstavljajo za rečno mejo 107,58 stopinje, ostalo je morska meja. Izračunajte strukturo državne meje po vrstah meje v odstotkih. *(Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)*

2 točki

Vrsta meje	**Dolžina meje v km**	**P_j %**	**Ločne stopinje**
Kopenska	921		
Rečna			107,58
Morska			
Skupaj	1382		

d) Izračunano strukturo prikažite grafično s strukturnim krogom.

2 točki

3. NALOGA

Tabela 3: Promet Luke Koper po mesecih v letu 2015

Mesec	V_j	**Promet (v tonah)**	
Januar	-		
Februar	80,26		
Marec	111,10		
April	126,07		
Maj	87,75		
Junij	94,22		
Julij	90,56		
Avgust	103,44	1,569.476,00	
September	110,25		
Oktober	90,70		
November	119,45		
December	91,15		

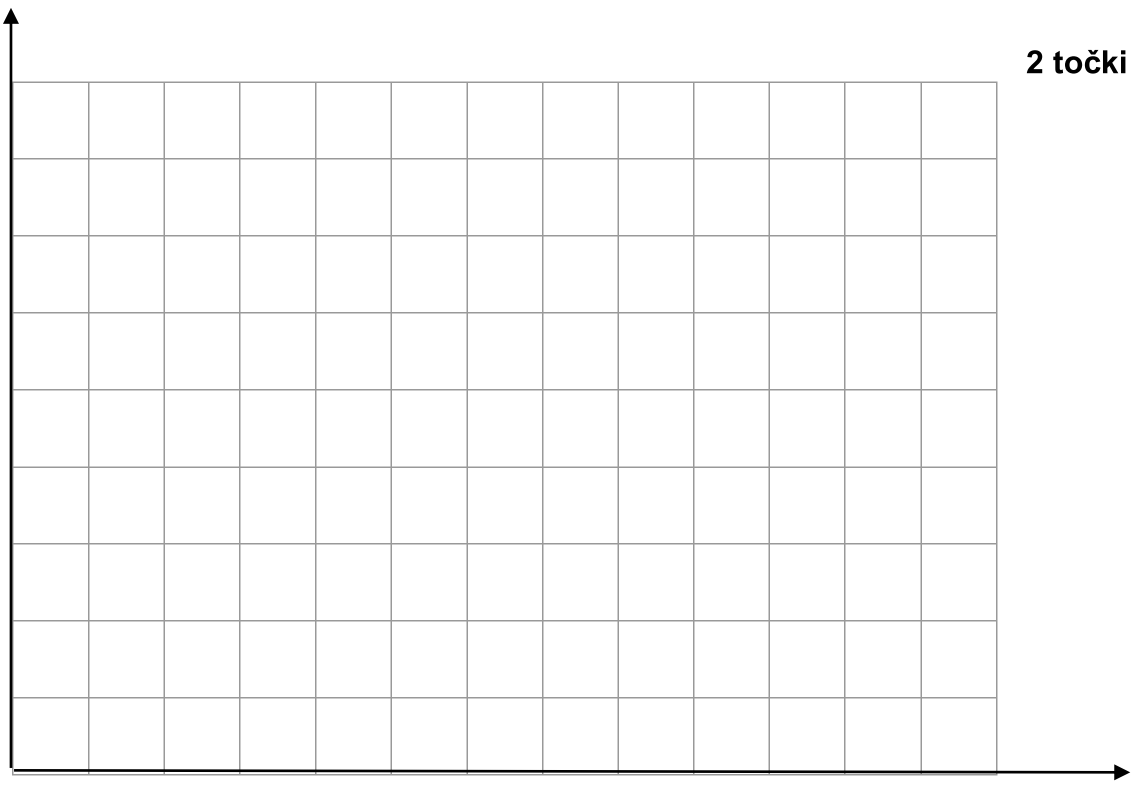
(Vir: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp , 27.11.2016)

a) Izračunajte promet Luke Koper v letu 2015 po mesecih, če vemo, da je promet v avgustu 2015 znašal 1,569.476 ton. *(Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo).*

2 točki

b) Verižne indekse prikažite grafično.

2 točki



c) Koliko je znašala stopnja rasti prometa v mesecu juniju in kaj nam pove?

2 točki

d) Koliko ton je znašala vrednost prometa januarja 2016, če je bil koeficient dinamike v tem mesecu 1,21454?

1 točka

4. NALOGA

V soboto, 26. 11. 2016, so na drugi tekmi 38. sezone svetovnega pokala v smučarskih skokih v finski Ruki v finale prišli trije slovenski skakalci. Jurij Tepeš je v prvi seriji skočil 124 metrov in zbral 112,9 točke, kar ga je vodilo na 19. mesto po prvem skoku. Veliko smolo z vetrom je imel starejši izmed bratov Prevc; tako je Peter skočil 129,5 metra in zbral 126,7 točke. Domen je pristal pri 131,5 metra in zbral 125,9 točke, kar ga je vodilo na 14. mesto, dve mesti za Petrom. V finalni seriji je veter krojil razplet, saj je nekaj sekund pihal vzgornjik, nekaj sekund pa veter v hrbet. Slednjega je dobil Tepeš, ki je pristal pri 79 metrih, kar ga je potisnilo na končno 30. mesto. Domen je v slabših pogojih pristal pri 128,5 metrih in skupno zbral 247,4 točke, kar ga je takoj po skoku privedlo na četrto mesto. Odlične pogoje je, sodeč po točkovnem odbitku, imel Peter, ki je s 135,5 metri prevzel vodstvo po svojem skoku. Skupno 261,4 točke ga je vodilo na končno sedmo mesto, potem ko so v težkih vetrovnih razmerah skakalci iz prve deseterice naredili kar nekaj napak.
(Vir: http://www.sloski.si/index.php?t=News&lang=sl&id=33831; 27.11.2016)

a) Koliko je znašalo povprečno število točk naše »trojke« po prvi seriji?

2 točki

b) Katera je bila tista razdalja v obeh serijah, od katere je bilo polovica skokov naših predstavnikov krajših?

3 točke

c) Kako imenujemo srednjo vrednost pod drugo točko?

1 točka

d) Zmagovalec Severin Freund je v prvi serij skočil 146,0 metrov, v drugi pa 138,0 metrov ter skupaj zbral za 11,17 % točk več kot Peter Prevc. Koliko točk je na koncu imel zmagovalec?

1 točka

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

31. marec 2017

Prilepi nalepko s šifro

N1	N2	N3	N4

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.
Dovoljena je uporaba žepnega računala.
Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.
Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

1. V spodnji tabeli so prikazani podatki o številu upokojencev, povprečni mesečni bruto pokojnini, razmerjem med številom zavarovancev in upokojencev in odhodkih za pokojnine, merjenih v odstotkih bruto domačega proizvoda (BDP).

Leto	Število upokojencev	Povprečna mesečna pokojnina v EUR	Razmerje zavarovanci : upokojenci	Pokojnine v % BDP
2006	510.795	515,08	1,67	10,01
2007	518.805	538,89	1,69	9,54
2008	527.933	581,00	1,71	9,70
2009	538.455	597,27	1,66	10,67
2010	552.561	603,79	1,60	11,04
2011	569.951	605,08	1,53	11,22
2012	585.408	590,47	1,46	11,52
2013	602.311	588,55	1,38	11,84
2014	608.885	586,88	1,39	11,49
2015	612.018	571,53	1,43	10,88

Vir: Zavod za pokojninsko in invalidsko zavarovanje (ZPIZ)

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Koliko je znašala povprečna mesečna pokojnina v obdobju 2013-2015? [3 točke]

b) V katerem letu v obdobju 2006-2015 je povprečna mesečna pokojnina prvič padla in za koliko odstotkov? Kako in za koliko odstotkov se je tedaj spremenila masa pokojnin (vsota vseh izplačanih pokojnin)? [4 točke]

c) Privzemimo, da so v obdobju 2011-2015 povprečne mesečne pokojnine padale linearno. Koliko bi moral znašati konstantni letni padec pokojnin, da bi bila povprečna pokojnina v letu 2015 enaka dejanski vrednosti? Kolikšna bi morala bila pri takšnem letnem padcu povprečna pokojnina v letu 2014? [5 točk]

d) Privzemimo, da so v obdobju 2011-2015 povprečne mesečne pokojnine padale s konstantno (negativno) letno stopnjo rasti. Kakšna bi morala biti letna stopnja rasti, da bi bila povprečna pokojnina v letu 2015 enaka dejanski vrednosti? Kolikšna bi morala bila pri tej stopnji rasti povprečna pokojnina v letu 2014? [5 točk]

e) Izračunaj bruto domači proizvod za Slovenijo za leto 2015. Vrednost v milijardah evrov zaokroži na tri decimalna mesta. [3 točke]

2. V lasti imamo letovišče. Lotevamo se prenove, zato bomo pri banki najeli kredit v višini 500.000 EUR. Kredit bo izplačan 1. aprila 2017. Povrnili ga bomo v osmih letih s četrtletnimi obroki, ki zapadejo 1. julija, 1. oktobra, 1. januarja in 1. aprila vsako leto, prvi obrok 1. julija 2017, zadnji 1. aprila 2025. Banka uporablja četrtletno relativno obrestovanje in 6 % letno obrestno mero.

   Rezultata zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Določi višino obrokov, če so vsi obroki enaki. [10 točk]

b) Ker v času poletne in zimske sezone z letoviščem ustvarimo višje prihodke kot v spomladanskem in jesenskem obdobju, se z banko dogovorimo za odplačevanje dolga z neenakimi obroki, in sicer bosta aprilski in oktobrski obrok dvakratnika januarskega in julijskega obroka. Določi višini višjega (april, oktober) in nižjega (januar, julij) obroka.

[10 točk]

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju za različna dospetja. Čas t merimo v letih.

t	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0,t)$	1,50 %	2,30 %	3,00 %	3,40 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata nominalno vrednost 100 EUR in dospetje čez leto in pol.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Prva kuponska obveznica izplačuje letne kupone po 3,55 % kuponski obrestni meri, naslednji bo izplačan čez natanko pol leta. Določi njeno ceno na trgu v času 0 (danes).

[4 točke]

b) Druga kuponska obveznica izplačuje polletne kupone, prvi bo izplačan čez natanko pol leta. Kolikšna je njena kuponska obrestna mera, če je njena cena na trgu danes 99,35 EUR? [6 točk]

c) Pol leta kasneje so po izplačilu kuponov obeh obveznic znane naslednje efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju

t	1,0	1,5	2,0
$R(0{,}5; t)$	1,40 %	R	2,40 %

Obveznica z letnimi kuponi iz a) je za 1 EUR dražja od obveznice s polletnimi kuponi iz b). Določi neznano obrestno mero R. [6 točk]

d) Kolikšno donosnost (v odstotkih) je ustvaril investitor, ki je v času 0 kupil ter pol leta kasneje prodal eno obveznico z letnimi kuponi? [4 točke]

4. Cena delnice podjetja danes znaša 20 EUR. Netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je 3,10 % za vsa dospetja. Uprava podjetja je objavila napoved, da bodo čez štiri mesece izplačevali dividende v višini 3 EUR na delnico.

   a) Banka je pripravljena brezplačno kupiti ali prodati terminski posel na delnico podjetja z ročnostjo čez pol leta. Določi izročitveno ceno v takšnem poslu, če na trgu ni možna arbitraža. [4 točke]

   b) Kmalu za tem delničarji na skupščini niso podprli predloga uprave in so sprejeli povišanje dividende na 5 EUR na delnico. Kako in za koliko bi se morala spremeniti izročitvena cena v terminskem poslu, da na trgu še vedno ne bi bila možna arbitraža? [4 točke]

c) Banka se na sklep skupščine delničarjev še ni odzvala in je ohranila izročitveno ceno iz naloge a), zato je na trgu možna arbitraža. Pripravi arbitražno strategijo. [12 točk]

Stran s formulami

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend

  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = S_t - K(1+R)^{-(T-t)}$

- na delnico, ki izplačuje dividende

  $F_t = \Big(S_t - I(t,T)\Big)(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- valutni terminski posel

  $F_t = S_t \dfrac{(1+R_d)^{T-t}}{(1+R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$

  $V_t = N\Big(S_t(1+R_f)^{-(T-t)} - K(1+R_d)^{-(T-t)}\Big)$

- dogovor o terminski obrestni meri

  $R(t,S,T) = \dfrac{1}{T-S}\left(\dfrac{1+R(0,T)\cdot(T-t)}{1+R(0,S)\cdot(S-t)} - 1\right), \quad K = R(0,S,T)$

  $V_t = \dfrac{N\cdot\Big(R(t,S,T)-K\Big)\cdot(T-S)}{1+R(t,T)\cdot(T-t)}$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$

  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$

- premija v času t, če delnica ne izplačuje dividend

  $\max\Big\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)}, 0\Big\} \le c_t \le S_t$

  $\max\Big\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\Big\} \le p_t \le K(1+R)^{-(T-t)}$

- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend

  $p_t + S_t = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}$

- premija v času t, če delnica izplačuje dividende

  $\max\Big\{S_t - K(1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\Big\} \le c_t \le S_t - I(t,T)$

  $\max\Big\{K(1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\Big\} \le p_t \le K(1+R)^{-(T-t)}$

- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende

  $p_t + S_t - I(t,T) = c_t + K(1+R)^{-(T-t)}$

- evropske in ameriške opcije

  $c_t^{\mathrm{E}} \le c_t^{\mathrm{A}}, \quad p_t^{\mathrm{E}} \le p_t^{\mathrm{A}}$

15. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Brežice, 31. marec 2017

1. skupina: **Poslovna matematika - rešitve**

1. NALOGA

a) Jeseni je bilo v 7 dneh v dolino privedenih 13.300 ovac, ki jih je spremljalo po 5 pastirjev na dan. Koliko ovac je bilo v naslednjih dveh tednih privedenih v dolino, če jih je spremljalo za 20 % več pastirjev kot prej, splošno število ovac pa se je zmanjšalo za 5 %? (1 teden = 7dni)

4 točke

Izračun števila pastirjev = $5 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)$ = 6 pastirjev na dan ali 5 x 1,20 = 6
Zmanjšanje splošnega števila ovc = (100 – 5) % = 95 %

7 dni	13.300 ovac	5 pastirjev	100 %
↑	↑	↑	↑
14 dni	x ovac	6 pastirjev	95 %

$$x = \frac{13.300 \; x \; 14 \, x \;\; 6 \, x \, 95}{7 \; x \; 5 \; x \; 100} = \underline{\mathbf{30.324 \text{ ovac}}}$$

Odg.: V naslednjih dveh tednih so v dolino prepeljali 30.324 ovac.

1 točka izračun števila pastirjev in splošnega števila ovac
1 točka zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje) in določitev vrste sorazmerij
1 točka zapis ulomka
1 točka izračun vrednosti neznanke

b) Z zalogo hrane, ki so jo imeli na razpolago, so lahko v hlevih dnevno oskrbeli 1.905 ovac. Za koliko ovac bo naslednji dan zadostovala za $\frac{1}{5}$ večja zaloga hrane, če se predvideva za $\frac{1}{10}$ manjša poraba hrane?

3 točke

Izračun zaloge hrane $\left(100 + \frac{1 \cdot 100}{5}\right)$ % = 120 % ali $\frac{1}{5}$ = 20 % (100 + 20) % =120 %
Izračun porabe = $\left(100 - \frac{1 \cdot 100}{10}\right)$ % = (100 – 10) % = 90 % ali $\frac{1}{10}$ = 10 % (100 – 10) % = 90 %

100-% zaloga	1.905 ovac	100-% poraba
↑	↑	↓
120-% zaloga	X ovac	90-% poraba

$x = \frac{1905 * 120 * 100}{100 * 90}$ = **<u>2.540 ovac</u>** (Odgovor: Zaloga bo zadostovala za 2.540 ovac.)

1 točka izračun zaloge in porabe
1 točka zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje) in določitev vrste sorazmerij
1 točka izračun vrednosti neznanke

2. NALOGA

V tovarni zdravil so iz skupnega denarnega sklada v višini 38.000,00 EUR razdelili denarne nagrade petim študentom, in sicer**:**

a) $\frac{1}{4}$ celotnega sklada premo sorazmerno s povprečno oceno študija:

1. študent Miha ima ocene: 8, 8, 8, 9, 10
2. študent Jernej ima ocene: 9, 9, 9, 9, 10
3. študentka Ana ima ocene: 8, 8, 8, 10, 10
4. študentka Ina ima ocene: 8, 8, 8, 8, 8
5. študent Žan ima ocene: 9, 9, 9, 9, 8

2 točki

__**Rešitev:**__

1. študent ima ocene: 8, 8, 8, 9, 10 povprečje = $\frac{43}{5}$ = 8,6
2. študent ima ocene: 9, 9, 9, 9, 10 povprečje = $\frac{46}{5}$ = 9,2
3. študent ima ocene: 8, 8, 8, 10, 10 povprečje = $\frac{44}{5}$ = 8,8
4. študent ima ocene: 8, 8, 8, 8, 8 povprečje = $\frac{40}{5}$ = 8,0
5. študent ima ocene: 9, 9, 9, 9, 8 povprečje = $\frac{44}{5}$ = 8,8

$\frac{1}{4}$ od 38,000,00 = 9.500,00 EUR

a + b + c + d + e = 9.500,00

a : b : c : d : e = 8,6 : 9,2 : 8,8 : 8,0 : 8,8 /x10 /:2

8,6x + 9,2x + 8,8x + 8,0x + 8,8x = 9.500,00

43,4 x = 9.500,00

__**x = 218,8940092**__

ali

43x+46x+44x+40x+44x = 9.500,00 (urejeno razmerje)

217x = 9.500,00

__x **= 43,77880184**__ in podobne pravilne rešitve

a = 8,6 x = 1.882,49 EUR
b = 9,2 x = 2.013,82 EUR
c = 8,8 x = 1.926,27 EUR
d = 8,0 x = 1.751,15 EUR
__e = 8,8 x = 1.926,27 EUR__
Skupaj = 9.500,00 EUR

1 točka zapis sorazmerja in enačbe glede na delitveno razmerje in izračun neznanke
1 točka izračun deležev po kriteriju A

b) $\frac{1}{2}$ celotnega denarnega sklada obratno sorazmerno z višino štipendije:

1. študent Miha: 150,00 EUR
2. študent Jernej: 200,00 EUR
3. študentka Ana: 120,00 EUR
4. študentka Ina: 300,00 EUR
5. študent Žan: 300,00 EUR

2 točki

Rešitev:

$\frac{1}{2}$ od 38.000,00 = 19.000,00 EUR

a + b + c + d + e = 19.000,00

$$a : b : c : d : e = \frac{1}{150} : \frac{1}{200} : \frac{1}{120} : \frac{1}{300} : \frac{1}{300} \quad / * 600$$

$$a : b : c : d : e = 4 : 3 : 5 : 2 : 2$$

4x + 3x + 5x + 2x + 2x = 19.000,00

16 x = 19.000,00

x = 1.187,5

a = 4x = 4.750,00 EUR
b = 3x = 3.562,50 EUR
c = 5x = 5.937,50 EUR
d = 2x = 2.375,00 EUR
e = 2x = 2.375,00 EUR
Skupaj = 19.000,00EUR

1 točka zapis sorazmerja in enačbe glede na delitveno razmerje in izračun neznanke
1 točka izračun deležev po kriteriju B

c) Ostanek od celotnega sklada pa so razdelili tako, da je bila podeljena ena prva nagrada, ena druga in tri tretje nagrade za prizadevnost študentov.
Prva nagrada je za 700,00 EUR višja od druge nagrade, tretja nagrada pa je za 20 % nižja kot druga nagrada. Prvo nagrado je prejela Ana, drugo Ina, tretjo nagrado pa so prejeli Žan, Miha in Jernej.

2 točki

Rešitev:

Ostanek = 38.000,00 – 9.500,00 – 19.000,00 = 9.500,00
a + b + c + d + e = 9.500,00
c = x + 700,00 => 2000,00 + 700,00 = **2.700,00 EUR** = 1. nagrada
d = x => **2000,00 EUR** = 2. nagrada
$(a+b+e) = 3x \cdot \frac{80}{100} = \frac{240\,x}{100}$ => $\frac{240 \cdot 2000}{100}$ = 4800,00 : 3 = **1.600,00 EUR** = tri 3. nagrade

(x + 700,00) + x + 2,4 x = 9.500,00
4,4 x + 700,00 = 9.500,00
x = 2.000,00

1 točka zapis sorazmerja in enačbe glede na delitveno razmerje in izračun neznanke
1 točka izračun deležev po kriteriju C

Kolikšne skupne nagrade so prejeli posamezni študentje? Napiši odgovor v spodnjo razpredelnico.

1 točka

Študent/ka	Kriterij A v EUR	Kriterij B v EUR	Kriterij C v EUR	Skupna nagrada v EUR
Miha (a)	1.882,49	4.750,00	1.600,00	8.232,49
Jernej (b)	2.013,82	3.562,50	1.600,00	7.176,32
Ana (c)	1.926,27	5.937,50	2.700,00	10.563,77
Ina (d)	1.751,15	2.375,00	2.000,00	6.126,15
Žan (e)	1.926,27	2.375,00	1.600,00	5.901,27
	9.500,00	19.000,00	9.500,00	38.000,00

1 točka izračun skupnih nagrad

3. NALOGA

a) V tovarni avtomobilov »Avtek, d. d.« beležijo za leto 2016 povprečno 15-% mesečno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov zaradi zmanjšanja povpraševanja na trgu. Koliko avtomobilov so proizvedli v tem podjetju pred zmanjšanjem proizvodnje, če so danes naredili 370 avtomobilov, današnje zmanjšanje proizvodnje pa je le polovica povprečnega mesečnega zmanjšanja proizvodnje avtomobilov?

2 točki

Rešitev:
p_1 = 15-% (povprečno mesečno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov)
C = ?
C^- = 370 …ustreza ..(100 – 7,5) % = 92,5 %
$p_2 = \frac{1}{2}$ od 15 % = 7,5 %

92,5 % ………………….. 370 avtomobilov
100 % …………………… x avtomobilov

$x = \frac{370 \cdot 100}{92,5}$ = **400 avtomobilov**

ALI: $C^- = C \cdot 0{,}925$
$C = \frac{C-}{0{,}925} = \frac{370}{0{,}925}$ = 400 avtomobilov

1 točka nastavitev sheme za izračun celote
1 točka izračun celote => števila avtomobilov

b) V mesecu novembru 2016 so v istem podjetju zabeležili 15,5-% zmanjšanje proizvodnje avtomobilov. 65 % je bilo zmanjšanja proizvodnje zaradi zmanjšanja povpraševanja na domačem trgu, ostalo pa je bilo zmanjšanje povpraševanja na tujem trgu.
Kolikšen je % zmanjšanja proizvodnje zaradi zmanjšanja povpraševanja na domačem trgu in kolikšen je % zaradi zmanjšanja povpraševanja na tujem trgu v tem mesecu**?**

2 točki

Rešitev:
C = p = 15,5-% (celotno zmanjšanje v novembru)… ustreza …100 %
p_1 = 65-% (zmanjšanje domači trg)
p_2 = (100 – 65)% = 35-% (zmanjšanje tuji trg)

100 % …………15,5 %   ali 15,5 x 0,65 =10,075 % = 10,08 %
65 % …………… x %

$x = \frac{15,5 \cdot 65}{100}$ = 10,075 % **= 10,08 %**

100 % ………… 15,5 %   ali 15,5 x 0,35 = 5,425 % = 5,43 %
35 % ………….. x %

$x = \frac{15,5 \cdot 35}{100}$ = 5,425 % **= 5,43 %**

1 točka izračun % zmanjšanja proizvodnje - domači trg
1 točka izračun % zmanjšanja proizvodnje - tuji trg

c) 15. decembra 2016 so v tem istem podjetju proizvedli 360 avtomobilov rdeče in modre barve. Od teh je bilo 60 % rdečih, 25 % proizvedenih avtomobilov modre barve pa je imelo vgrajeno napravo za parkiranje. Koliko modrih avtomobilov z vgrajeno napravo za parkiranje je bilo proizvedenih ta dan?

2 točki

<u>Rešitev:</u>

C = 360 (vsi proizvedeni avtomobili na dan 15. december)

p = 60 % (rdeči) $d_R = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{360 \cdot 60}{100}$ = **<u>216 vseh rdečih</u>**

$d_M = 360 – 216 =$ **<u>144 vseh modrih</u>**

$C_{(modri)} = 144$

p = 25 % (modri z vgrajeno napravo)

$d = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{144 \cdot 25}{100}$ = **<u>36 modrih avtomobilov z vgrajeno napravo za parkiranje</u>**

1 točka izračun avtomobilov modre in rdeče barve

1 točka izračun modrih avtomobilov z vgrajeno napravo za parkiranje

d) Koliko procentno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov beležijo v tem podjetju na dan 15. december 2016?

1 točka

<u>Rešitev:</u>

C = 400 avtomobilov …… ustreza …..100 %

C **– d** = 360 avtomobilov — ali 360/400 = 0,90 x 100 = 90 %

<u>d = 400 – 360 = 40 avtomobilov</u> — (100 % - 90 %) = **<u>10 %</u>**

p = x %

100 % …………….. 400 avtomobilov

<u>x % …………… 40 avtomobilov</u>

$x = \frac{100 * 40}{400}$ = **<u>10 %</u>**

1 točka izračun odstotka

4. NALOGA

Janez se je odločil varčevati. Na bančni račun je položil 450,00 EUR. Banka obrestuje vloge po 2,5-% letni dekurzivni obrestni meri in letni kapitalizaciji.

a) Koliko denarja bo imel Janez na bančnem računu po 2 letih?

2 točki

Rešitev:
G_0 = 450,00 EUR
p = 2,5 %
n = 2 leti
m = 1
G_n = x EUR

$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2,5}{100} = \underline{1,025}$

$G_n = G_0 \times r^n$

$G_n = 450,00 \times 1,025^2 = \underline{\mathbf{472,78\ EUR}}$

1 točka nastavitev enačbe za izračun G_n pri m = 1 in vstavitev podatkov
1 točka izračun G_n

b) K privarčevanemu znesku iz naloge a) Janez položi na varčevalni račun še 127,22 EUR. Dekurzivna obrestna mera se zviša za 0,5 odstotne točke. Banka pripisuje obresti mesečno pri relativnem izračunu obrestne mere. Koliko denarja ima Janez na bančnem računu po 5 letih varčevanja?

3 točke

Rešitev:
G_0 = 472,78 + 127,22 = 600,00 EUR
p = 3 % (2,5 + 0,5)
n = 5 let
m = 12
G_n = x EUR

$p' = \frac{p}{m} = \frac{3\ \%}{12} = 0,25\ \%$

$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{0,25}{100} = \underline{1,0025}$

$G_n = G_0 \times r'^{(n*m)}$
$G_n = 600,00 \times (1,0025)^{(5*12)} = \underline{\mathbf{696,97\ EUR}}$

1 točka izračun r´
1 točka nastavitev enačbe za izračun G_n pri m > 1 in vstavitev podatkov
1 točka izračun G_n

c) Kolikšna bi morala biti letna dekurzivna obrestna mera, da bi se Janezova začetna vloga v 15 letih pri letnem pripisu obresti potrojila?

2 točki

<u>Rešitev:</u>

$G_n = 3 * G_o$

$n = 15$ let

$\underline{m = 1}$

$p = x$ %

$G_n = G_o \times r^n$

$r = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$

$r = \sqrt[15]{\frac{3 \times G_0}{G_0}}$

$r = \sqrt[15]{3}$

$\underline{\boldsymbol{r = 1,075989625}}$

$p = (\mathrm{r} - 1) \times 100$

$\underline{\mathrm{p} = (1{,}075989625 - 1) \times 100 = \mathbf{7,60}\ \%}$

ali

$$p = (\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1) \times 100$$

$$\mathrm{p} = \left(\sqrt[15]{\frac{3 \times G_0}{G_0}} - 1\right) = \left(\sqrt[15]{3} - 1\right) \times 100 = \mathbf{7,60}\ \%$$

1 točka nastavitev enačbe za izračun obrestne mere pri m = 1 in vstavitev podatkov
1 točka izračun letne dekurzivne obrestne mere (%)

15. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Brežice, 31. marec 2017

2. skupina: **Statistika – rešitve**

---

1. NALOGA

Imena ljudi se skozi čas spreminjajo. V preteklosti zelo pogosta imena pri nas, kot so Franc, Jožef, Ivan, Anton idr., se danes novorojenčkom skoraj ne podeljujejo več. Ime Marija, ki ga je npr. med leti 1951–1960 v Sloveniji dobilo še 12.498 novorojenk, je med leti 2010–2015 dobilo le 230 novorojenk (Vir: Surs). V zadnjih letih so modna popolnoma drugačna imena. V tabeli so prikazana najpogostejša imena, ki so jih dobili novorojenčki v letu 2015.

Tabela 1: **Najpogostejša imena dečkov in deklic, rojenih v Sloveniji v letu 2015**

	**Ime dečka**	**Število dečkov**	**Ime deklice**	**Število deklic**	**P_j %**
1	Luka	328	Ema	267	25,87
2	Filip	254	Eva	259	20,03
3	Nik	248	Zala	240	19,56
4	Mark	222	Sara	220	17,51
5	Žan	216	Lara	206	17,03
6	Jakob	206	Nika	205	
7	Jaka	191	Julija	200	
8	Žiga	178	Ana	183	
9	David	168	Lana	176	
10	Anže	164	Mia	174	
Skupaj		2175		2130	100,00

a) Izračunajte strukturo **prvih petih najpogostejših** moških imen (Luka, Filip, Nik, Mark, Žan) v letu 2015 v odstotkih in rezultate vpišite v zgornjo tabelo. *(Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)*

2 točki

2 točki za vse pravilno izračune strukturne odstotke
1 točka v primeru 1 napake

O točk v primeru 2 ali več napak

b) Kolikšen je strukturni delež petega najpogostejšega moškega imena med vsemi desetimi moškimi imeni? Kolikšen je strukturni delež petega najpogostejšega ženskega imena med vsemi desetimi ženskimi imeni? *(Rezultate zaokrožite na tri decimalna mesta natančno.)*

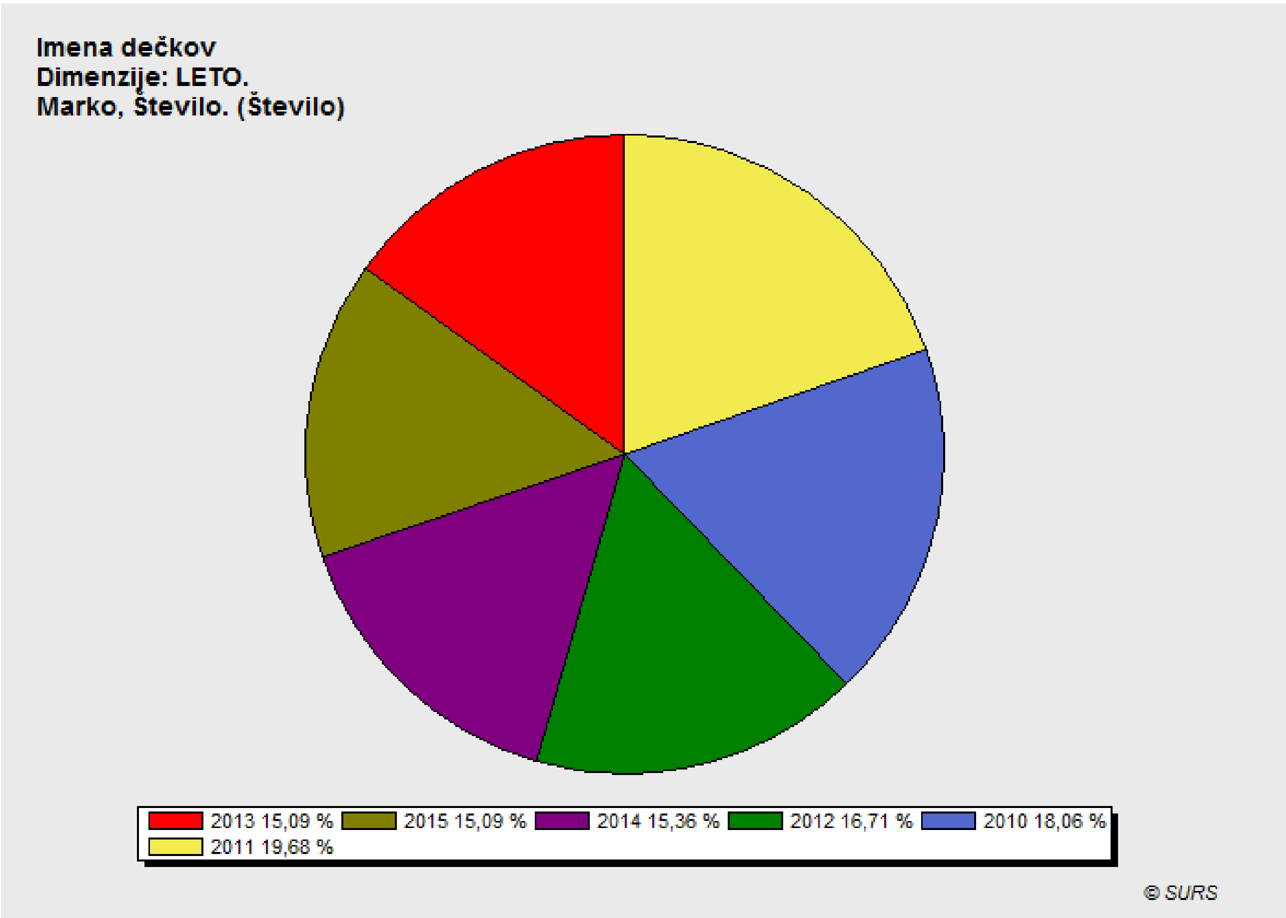
- Strukturni delež imena Žan med desetimi moškimi imeni je **0,099.**
- Strukturni delež imena Lara med desetimi ženskimi imeni je **0,097.**

2 točki

1 točka za pravilno izračunan strukturni delež imena Žan
1 točka za pravilno izračunan strukturni delež imena Lara

c) Ali veste, da je moško ime Marko še vedno na skupno 5. mestu med najpogostejšimi imeni v Sloveniji? Po podatkih SURS je na dan 1. 1. 2016 živelo pri nas 17.164 oseb s tem imenom (Vir: http://www.stat.si/ImenaRojstva/sl/FirstNames).

Učitelj je dijakom pokazal struktrurni krog števila novorojenčkov, ki so dobili ime Marko v letih od 2010 do 2015.



Slika 1: **Struktura novorojenčkov z imenom Marko v Sloveniji v letih od 2010 do 2015**
(Vir: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp)

d) V spodnjo tabelo vpišite število dečkov z imenom Marko po posameznih letih. Iz tabele je razvidno, da je leta 2010 ime Marko dobilo 67 novorojenčkov. *(Rezultate zaokrožite na cela števila.)*

Tabela 2: **Število živorojenih otrok z imenom Marko v letih od 2010 do 2015**

Leto rojstva	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Število otrok	67	**73**	**62**	**56**	**57**	**56**

Vir: SURS

3 točke

3 točke za vse pravilne izračune števila živorojenih otrok
2 točki v primeru 1 napake
1 točka v primeru 2 napak
0 točk v primeru 3 ali več napak

2. NALOGA

1. julija 2016 je bila gostota prebivalstva v Sloveniji 101,8 prebivalca na km².

a) Koliko prebivalcev je štela Slovenija na ta dan, če vemo, da je površina države 20.273 km²?

2 točki

Rešitev:

Gostota prebivalcev = 101,8 prebivalca na km²

$$101{,}8 = \frac{x\ prebivalcev}{20273}$$

$$x = 2063791\ prebivalcev$$

Odgovor: 1. julija 2016 je Slovenija štela 2.063.791 prebivalcev.

1 točka za pravilen zapis enačbe (nastavitev formule)
1 točka za pravilno izračunano število prebivalcev

b) Koliko zdravnikov naj bi imeli v Sloveniji, če odpade približno 2,5 zdravnika na 1000 prebivalcev?

1 točka

Rešitev:

$$K = \frac{št.zdravnikov}{št.prebivalec} * 1000 \qquad 2{,}5 = \frac{x}{2063791} * 1000$$

x = 5.159 zdravnikov

1 točka za pravilno izračunano število zdravnikov

c) Dolžina državne meje znaša 1.382 km, od tega je 921 km kopenske, izračunane ločne stopinje za prikaz s krogom predstavljajo za rečno mejo 107,58 stopinje, ostalo je morska meja. Izračunajte strukturo državne meje po vrstah meje v odstotkih.

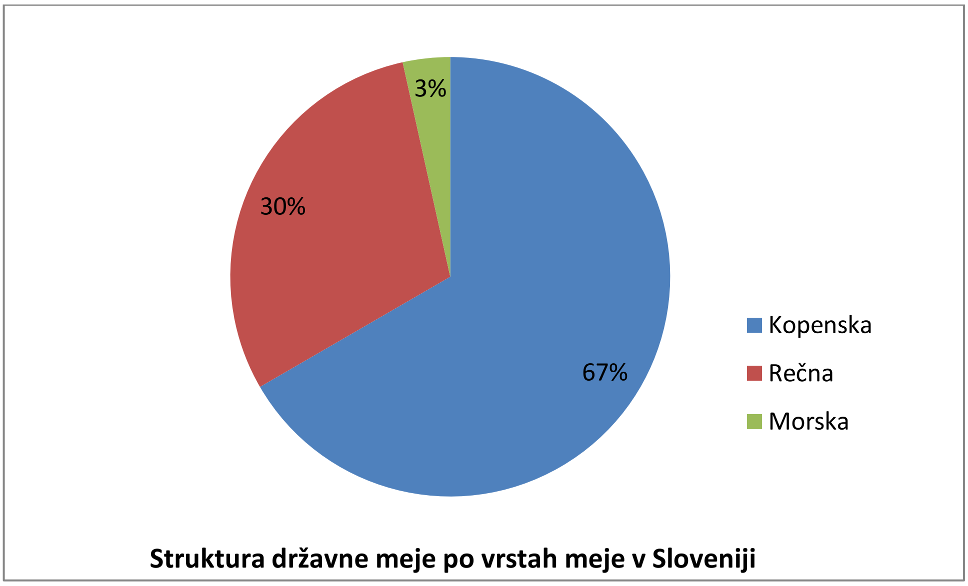
2 točki

Vrsta meje	**Dolžina meje v km**	**P_j %**	**Ločne stopinje**
Kopenska	**921**	**66,64**	239,91
Rečna	413	**29,89**	**107,58**
Morska	48	**3,47**	12,51
Skupaj	**1382**	**100,0**	360,00

2 točki za pravilno izračunane strukturne odstotke
1 točka v primeru 1 napake
O točk v primeru 2 ali več napak

d) Izračunano strukturo prikažite grafično s strukturnim krogom.

2 točki



1 točki za pravilno narisan krog
1 točka za naslov grafikona in legendo

3. NALOGA

Tabela 3: Promet Luke Koper po mesecih v letu 2015

Mesec	**V_j**	**Promet (v tonah)**	
Januar	-	1,802,663,07	
Februar	80,26	1,446.817,38	
Marec	111,10	1,607.414,11	
April	126,07	2,026,466,96	
Maj	87,75	1,778.224,76	
Junij	94,22	1,675.443,37	
Julij	90,56	1,517.281,52	
Avgust	103,44	1,569.476,00	
September	110,25	1,730.347,29	
Oktober	90,70	1,569.424,99	
November	119,45	1,874.678,15	
December	91,15	1,708.769,14	

(Vir: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp , 27.11.2016)

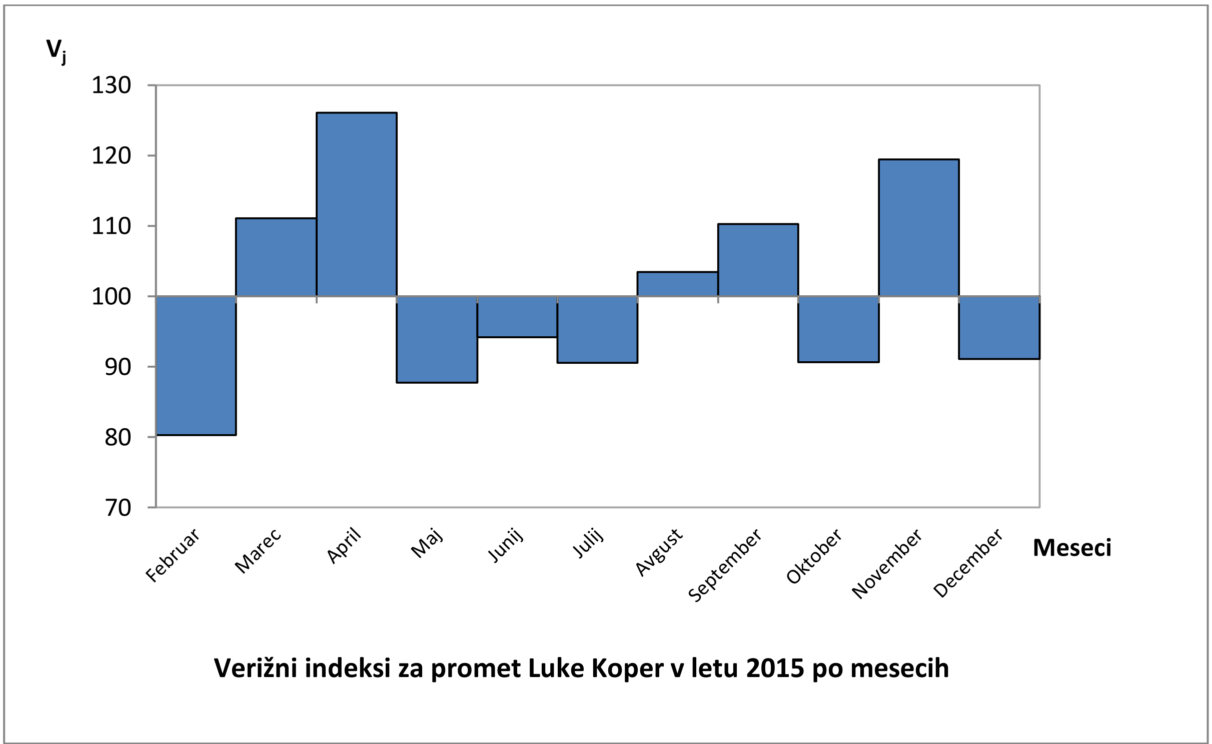
a) Izračunajte promet Luke Koper v letu 2015 po mesecih, če vemo, da je promet v avgustu 2015 znašal 1,569.476 ton. *(Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo).*

2 točki

2 točki za vse pravilno izračunane vrednosti prometa po mesecih
1 točka v primeru 1 napake
O točk v primeru 2 ali več napak

b) Verižne indekse prikažite grafično.

2 točki



1 točki za pravilno narisan grafikon
1 točka za naslov grafikona, oznake osi in legendo

c) Koliko je znašala stopnja rasti prometa v mesecu juniju in kaj nam pove?

2 točki

$S_{junij\ \%} = -5{,}78\ \%$

Odgovor: Junija 2015 je bil promet Luke Koper za 5,78 % manjši kot maja istega leta.

1 točki za pravilno izračunano stopnjo rasti za junij
1 točka za pravilno razlago stopnje rasti

d) Koliko ton je znašala vrednost prometa januarja 2016, če je bil koeficient dinamike v tem mesecu 1,21454?

1 točka

$Promet_{jan}$ = 1,708.769,14 * 1,21454 = 2,075.368,47 tone

1 točka za pravilno izračunano vrednost prometa v januarju

4. NALOGA

V soboto, 26. 11. 2016, so na drugi tekmi 38. sezone svetovnega pokala v smučarskih skokih v finski Ruki v finale prišli trije slovenski skakalci. Jurij Tepeš je v prvi seriji skočil 124 metrov in zbral 112,9 točke, kar ga je vodilo na 19. mesto po prvem skoku. Veliko smolo z vetrom je imel starejši izmed bratov Prevc; tako je Peter skočil 129,5 metra in zbral 126,7 točke. Domen je pristal pri 131,5 metra in zbral 125,9 točke, kar ga je vodilo na 14. mesto, dve mesti za Petrom. V finalni seriji je veter krojil razplet, saj je nekaj sekund pihal vzgornjik, nekaj sekund pa veter v hrbet. Slednjega je dobil Tepeš, ki je pristal pri 79 metrih, kar ga je potisnilo na končno 30. mesto. Domen je v slabših pogojih pristal pri 128,5 metrih in skupno zbral 247,4 točke, kar ga je takoj po skoku privedlo na četrto mesto. Odlične pogoje je, sodeč po točkovnem odbitku, imel Peter, ki je s 135,5 metri prevzel vodstvo po svojem skoku. Skupno 261,4 točke ga je vodilo na končno sedmo mesto, potem ko so v težkih vetrovnih razmerah skakalci iz prve deseterice naredili kar nekaj napak.
(Vir: http://www.sloski.si/index.php?t=News&lang=sl&id=33831; 27.11.2016)

a) Koliko je znašalo povprečno število točk naše »trojke« po prvi seriji?

2 točki

Rešitev:

$$M = \frac{112,9+126,7+125,9}{3} = \frac{365,5}{3} = 121,83\ točke$$

Odgovor: Povprečno število točk naše »trojke« po prvi seriji je bilo 121,83.

1 točka za pravilno nastavitev izračuna aritmetične sredine
1 točka za pravilno izračunano povprečno število točk

b) Katera je bila tista razdalja v obeh serijah, od katere je bilo polovica skokov naših predstavnikov krajših?

3 točke

Rešitev:

R	1	2	3	4	5	6
Y_j	79	124	128,5	129,5	131,5	135,5

$$R = \frac{N+1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \qquad Me = \frac{128,5+129,5}{2} = 129\ metrov$$

Odgovor: Polovica skokov je bilo krajših od 129 metrov.

1 točka za zapis ranžirne vrste
1 točka za pravilno izračunan rang
1 točka za pravilno izračunano mediano

c) Kako imenujemo srednjo vrednost pod drugo točko?

1 točka

Rešitev: **MEDIANA**
1 točka za ugotovitev srednje vrednosti - mediane

d) Zmagovalec Severin Freund je v prvi serij skočil 146,0 metrov, v drugi pa 138,0 metrov ter skupaj zbral za 11,17 % točk več kot Peter Prevc. Koliko točk je na koncu imel zmagovalec?

1 točka

$$x = \frac{261{,}4 * 111{,}17}{100} = 290{,}60\ točke$$

Odgovor: Zmagovalec Severin Freund je dosegel 290,60 točke.

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

31. marec 2017

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V spodnji tabeli so prikazani podatki o številu upokojencev, povprečni mesečni bruto pokojnini, razmerjem med številom zavarovancev in upokojencev in odhodkih za pokojnine, merjenih v odstotkih bruto domačega proizvoda (BDP).

Leto	Število upokojencev	Povprečna mesečna pokojnina v EUR	Razmerje zavarovanci : upokojenci	Pokojnine v % BDP
2006	510.795	515,08	1,67	10,01
2007	518.805	538,89	1,69	9,54
2008	527.933	581,00	1,71	9,70
2009	538.455	597,27	1,66	10,67
2010	552.561	603,79	1,60	11,04
2011	569.951	605,08	1,53	11,22
2012	585.408	590,47	1,46	11,52
2013	602.311	588,55	1,38	11,84
2014	608.885	586,88	1,39	11,49
2015	612.018	571,53	1,43	10,88

Vir: Zavod za pokojninsko in invalidsko zavarovanje (ZPIZ)

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Koliko je znašala povprečna mesečna pokojnina v obdobju 2013-2015? [3 točke]

Rešitev

V navedenem obdobju se je spreminjalo število upokojencev.

Povprečno pokojnino dobimo kot uteženo povprečje povprečnih mesečnih pokojnin v posameznih letih, v katerem so uteži sorazmerne številu upokojencev:

$$\mu = \frac{602.311 \cdot 588{,}55 + 608.885 \cdot 586{,}88 + 612.018 \cdot 571{,}53}{602.311 + 608.885 + 612.018} = 582{,}28 \text{ EUR}.$$

Povprečna pokojnina v obdobju 2013-2015 je znašala 582,28 EUR.

Točkovanje

Uporaba uteženega povprečja (utež sorazmerna številu upokojencev) 1 točka.

Rezultat 2 točki.

Če tekmovalec ne upošteva števila upokojencev, dobi 1 točko.

b) V katerem letu v obdobju 2006-2015 je povprečna mesečna pokojnina prvič padla in za koliko odstotkov? Kako in za koliko odstotkov se je tedaj spremenila masa pokojnin (vsota vseh izplačanih pokojnin)? [4 točke]

Rešitev

Povprečna mesečna pokojnina je prvič je padla v letu 2012. Odstotna sprememba je znašala

$$\frac{590{,}47 - 605{,}08}{605{,}08} = -2{,}41\,\%.$$

Povprečna mesečna pokojnina je padla za 2,41 %.

Masa pokojnin je v letu 2011 je znašala

$$569.951 \cdot 605{,}08 \cdot 12 = 4.138.391.412{,}96 \text{ EUR},$$

v letu 2012 pa

$$585.408 \cdot 590{,}47 \cdot 12 = 4.147.990.341{,}12 \text{ EUR}.$$

Odstotna sprememba mase pokojnin znaša

$$\frac{4.147.990.341{,}12 - 4.138.391.412{,}96}{4.138.391.412{,}96} = 0{,}23\,\%.$$

Masa pokojnin se je povišala za 0,23 %.
Opomba: Enak rezultat dobimo, če določimo in primerjamo mesečni masi pokojnin.

Točkovanje

Izbira leta 1 točka.
Odstotna sprememba mesečne pokojnine 1 točka.
Razumevanje letne (lahko mesečne) mase pokojnin 1 točka.
Odstotna sprememba mase pokojnin 1 točka.

c) Privzemimo, da so v obdobju 2011-2015 povprečne mesečne pokojnine padale linearno. Koliko bi moral znašati konstantni letni padec pokojnin, da bi bila povprečna pokojnina v letu 2015 enaka dejanski vrednosti? Kolikšna bi morala bila pri takšnem letnem padcu povprečna pokojnina v letu 2014? [5 točk]

Rešitev

Povprečna mesečna pokojnina v letu 2011 je znašala $x_{2011} = 605{,}08$ EUR, v letu 2015 pa $x_{2015} = 571{,}53$ EUR.
Označimo (negativni) letni padec z d. Veljati mora $x_{2015} = x_{2011} + 4d$, od koder dobimo

$$d = \frac{x_{2015} - x_{2011}}{4} = \frac{571{,}53 - 605{,}08}{4} = -8{,}39 \text{ EUR}.$$

Pokojnine bi vsako leto padle za 8,39 EUR.

Povprečna pokojnina v letu 2014 bi znašala

$$605{,}08 + 3d = 605{,}08 - 3 \cdot 8{,}39 = 579{,}91 \text{ EUR}.$$

Točkovanje

Razumevanje naloge (linearnost ali aritmetično zaporedje) 1 točka.
Letni padec 2 točki.
Pokojnina v letu 2014 1+1 točka.*

d) Privzemimo, da so v obdobju 2011-2015 povprečne mesečne pokojnine padale s konstantno (negativno) letno stopnjo rasti. Kakšna bi morala biti letna stopnja rasti, da bi bila povprečna pokojnina v letu 2015 enaka dejanski vrednosti? Kolikšna bi morala bila pri tej stopnji rasti povprečna pokojnina v letu 2014? [5 točk]

Rešitev

Povprečna mesečna pokojnina v letu 2011 je znašala $x_{2011} = 605{,}08$ EUR, v letu 2015 pa $x_{2015} = 571{,}53$ EUR.
Označimo letni faktor rasti z g. Veljati mora $x_{2015} = x_{2011} \cdot g^4$, od koder dobimo

$$g^4 = \frac{x_{2015}}{x_{2011}} \quad \Rightarrow \quad g = \sqrt[4]{\frac{x_{2015}}{x_{2011}}} = \sqrt[4]{\frac{571{,}53}{605{,}08}} = 0{,}9858.$$

(Negativna) letna stopnja rasti je $0{,}9858 - 1 = -1{,}42\,\%$.

Povprečna pokojnina v letu 2014 bi znašala

$$605{,}08 \cdot g^3 = 605{,}08 \cdot 0{,}9858^3 = 579{,}67 \text{ EUR}.$$

Točkovanje

Razumevanje naloge (eksponentnost ali geometrijsko zaporedje) 1 točka.
Letni faktor rasti 1 točka.
Letna stopnja rasti 1 točka.*
Pokojnina v letu 2014 1+1 točka (upoštevamo odstopanja, ki so posledica zaokroževanja g).*

e) Izračunaj bruto domači proizvod za Slovenijo za leto 2015. Vrednost v milijardah evrov zaokroži na tri decimalna mesta. [3 točke]

Rešitev

Masa pokojnin v letu 2015 je znašala $612.018 \cdot 571{,}53 \cdot 12 = 4.197.439.770{,}48$ EUR in je predstavljala 10,88 % BDP.
BDP je zato znašal

$$\frac{4.197.439.770\,48}{0{,}1088} = 38{,}579 \text{ milijard EUR}.$$

Točkovanje

Letna masa pokojnin 1 točka.
Bruto domači proizvod 2 točki.
Za izračun mesečnega BDP damo 1 točko.

2. V lasti imamo letovišče. Lotevamo se prenove, zato bomo pri banki najeli kredit v višini 500.000 EUR. Kredit bo izplačan 1. aprila 2017. Povrnili ga bomo v osmih letih s četrtletnimi obroki, ki zapadejo 1. julija, 1. oktobra, 1. januarja in 1. aprila vsako leto, prvi obrok 1. julija 2017, zadnji 1. aprila 2025. Banka uporablja četrtletno relativno obrestovanje in 6 % letno obrestno mero.

Rezultata zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Določi višino obrokov, če so vsi obroki enaki. [10 točk]

Rešitev

Glavnica kredita je $G = 500.000$ EUR.

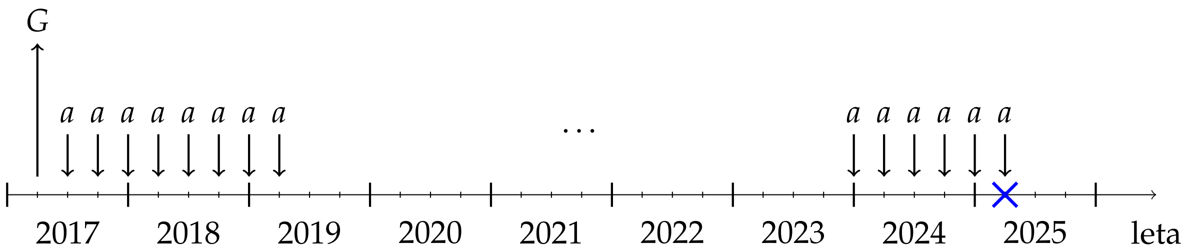
Dolg odplačamo z 32 četrtletnimi obroki v višini a.

Prvi obrok plačamo 1 četrtletje po najemu kredita, zadnjega 32 četrtletij po najemu.

Letna obrestna mera je $p_{\%} = 6\,\%$.

Relativni četrtletni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 4} = 1 + \frac{6}{100 \cdot 4} = 1{,}015$.

Denarne tokove po četrtletjih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin je trenutek zadnjega obroka.

Z načelom ekvivalence glavnic dobimo:

$$\begin{aligned} Gr^{32} &= ar^{31} + ar^{30} + ar^{29} + \cdots + ar^2 + ar + a = \\ &= a(r^{31} + r^{30} + r^{29} + \cdots + r^2 + r + 1) \end{aligned}$$

Seštejemo geometrijsko vrsto (količnik r):

$$Gr^{32} = a\,\frac{r^{32} - 1}{r - 1}.$$

Rešimo enačbo za neznanko a:

$$a = \frac{Gr^{32}(r-1)}{r^{32} - 1} = \frac{500.000 \cdot 1{,}015^{32}(1{,}015 - 1)}{1{,}015^{32} - 1} = 19.788{,}55 \text{ EUR}.$$

Višina obroka je 19.788,55 EUR.

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 2 točki.

Mesečni obrestni faktor 1 točka.

Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 2 točki.

Vsota geometrijske vrste 2 točki.*

Razrešitev enačbe za a in rezultat 2+1 točka.*

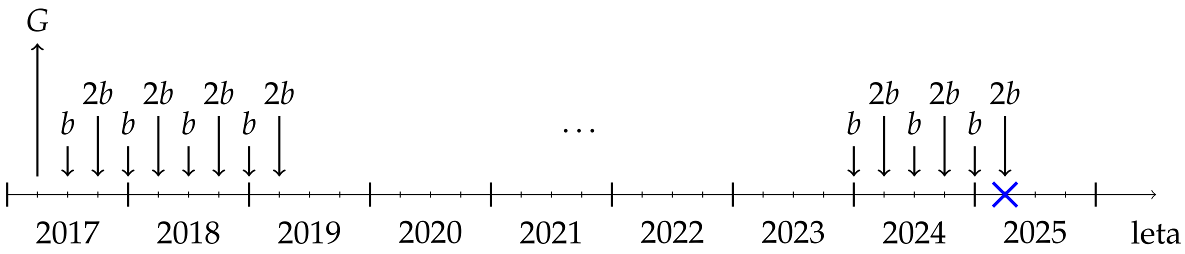
Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

b) Ker v času poletne in zimske sezone z letoviščem ustvarimo višje prihodke kot v spomladanskem in jesenskem obdobju, se z banko dogovorimo za odplačevanje dolga z neenakimi obroki, in sicer bosta aprilski in oktobrski obrok dvakratnika januarskega in julijskega obroka. Določi višini višjega (april, oktober) in nižjega (januar, julij) obroka.

[10 točk]

Rešitev

Popravimo shemo denarnih tokov, tako da januarski in julijski obroki znašajo b, aprilski in oktobrski pa $2b$.



Redukcijski termin je trenutek zadnjega obroka.
Z načelom ekvivalence glavnic dobimo:

$$Gr^{32} = br^{31} + 2br^{30} + br^{29} + 2br^{28} + \cdots + br^3 + 2br^2 + br + 2b.$$

Združimo člene s faktorjem b in člene s faktorjem $2b$ ter izpostavimo skupne faktorje:

$$Gr^{32} = br\Big(r^{30} + r^{28} + \cdots r^2 + 1\Big) + 2b\Big(r^{30} + r^{28} + \cdots r^2 + 1\Big).$$

Seštejemo geometrijski vrsti (količnik r^2):

$$Gr^{32} = br\,\frac{r^{32}-1}{r^2-1} + 2b\,\frac{r^{32}-1}{r^2-1}.$$

Še nadalje izpostavimo

$$Gr^{32} = b\,\frac{r^{32}-1}{r^2-1}\,(r+2).$$

Rešimo enačbo za neznanko b:

$$b = \frac{Gr^{32}(r^2-1)}{(r^{32}-1)(r+2)} = \frac{500.000 \cdot 1{,}015^{32}(1{,}015^2-1)}{(1{,}015^{32}-1)(1{,}015+2)} = 13.225{,}18 \text{ EUR}.$$

Višini obrokov sta 13.225,18 EUR (januar, julij) in 26.450,36 EUR (april, oktober).

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 2 točki.
Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 2 točki.
Vsota geometrijske vrste 3 točke.*
Postopkovne točke damo samo v primeru, če ima geometrijska vrsta količnik r^2.
Razrešitev enačbe za b in rezultat 2+1 točka.*
Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju za različna dospetja. Čas t merimo v letih.

t	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0,t)$	1,50 %	2,30 %	3,00 %	3,40 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata nominalno vrednost 100 EUR in dospetje čez leto in pol.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

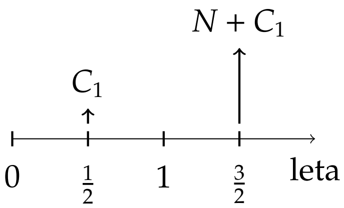
a) Prva kuponska obveznica izplačuje letne kupone po 3,55 % kuponski obrestni meri, naslednji bo izplačan čez natanko pol leta. Določi njeno ceno na trgu v času 0 (danes). [4 točke]

Rešitev

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ EUR.

Letni kupon je enak $C_1 = 0{,}0355 \cdot 100 = 3{,}55$ EUR.

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P_1 = C_1 \cdot D(0, \tfrac{1}{2}) + (N + C_1) \cdot D(0, \tfrac{3}{2})$$

$$P_1 = \frac{C_1}{(1 + R(0, \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}} + \frac{N + C_1}{(1 + R(0, \frac{3}{2}))^{\frac{3}{2}}}$$

$$P_1 = \frac{3{,}55}{1{,}015^{\frac{1}{2}}} + \frac{103{,}55}{1{,}03^{\frac{3}{2}}}$$

$$P_1 = 102{,}58 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.*

Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.

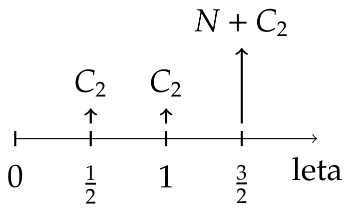
Cena obveznice 1 točka.

b) Druga kuponska obveznica izplačuje polletne kupone, prvi bo izplačan čez natanko pol leta. Kolikšna je njena kuponska obrestna mera, če je njena cena na trgu danes 99,35 EUR? [6 točk]

Rešitev

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ EUR, cena obveznice je $P_2 = 99{,}35$ EUR.

Polletni kupon je enak C_2.



S formulo za vrednotenje obveznic dobimo zvezo:

$$P_2 = C_2 \cdot D(0, \tfrac{1}{2}) + C_2 \cdot D(0, 1) + (N + C_2) \cdot D(0, \tfrac{3}{2})$$

$$P_2 = C_2\Big(D(0, \tfrac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \tfrac{3}{2})\Big) + N \cdot D(0, \tfrac{3}{2})$$

$$C_2 = \frac{P_2 - N \cdot D(0, \frac{3}{2})}{D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2})}$$

$$C_2 = \frac{99{,}35 - 100 \cdot 1{,}03^{-\frac{3}{2}}}{1{,}015^{-\frac{1}{2}} + 1{,}023^{-1} + 1{,}03^{-\frac{3}{2}}}$$

$$C_2 = 1{,}26 \text{ EUR}$$

Višino kupona C_2 in kuponsko obrestno mero c_2 povezuje enačba

$$C_2 = N \cdot \Delta \cdot c_2,$$

kjer je $\Delta = \frac{1}{2}$. Dobimo kuponsko obrestno mero $c_2 = \dfrac{C_2}{N \cdot \Delta} = \dfrac{1{,}26}{100 \cdot \frac{1}{2}} = 2{,}52\,\%$.

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.
Formula za vrednotenje obveznice, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.
Izrazitev in izračun višine kupona C_2 2+1 točka.*
Kuponska obrestna mera 1 točka.*

c) Pol leta kasneje so po izplačilu kuponov obeh obveznic znane naslednje efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju

t	1,0	1,5	2,0
$R(0{,}5; t)$	1,40 %	R	2,40 %

Obveznica z letnimi kuponi iz a) je za 1 EUR dražja od obveznice s polletnimi kuponi iz b). Določi neznano obrestno mero R. [6 točk]

Rešitev

Cena obveznice iz a) z letnimi kuponi je

$$\widetilde{P}_1 = (N + C_1)D(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{N + C_1}{1 + R} = \frac{103{,}55}{1 + R}.$$

Cena obveznice iz b) s polletnimi kuponi je

$$\widetilde{P}_2 = C_2 \cdot D(\tfrac{1}{2}, 1) + (N + C_2)D(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{1{,}26}{1{,}014^{\frac{1}{2}}} + \frac{101{,}26}{1 + R}.$$

Iz primerjave cen dobimo:

$$\frac{103{,}55}{1+R} = \frac{1{,}26}{1{,}014^{\frac{1}{2}}} + \frac{101{,}26}{1+R} + 1$$

$$\frac{103{,}55 - 101{,}26}{1+R} = \frac{1{,}26 + 1{,}014^{\frac{1}{2}}}{1{,}014^{\frac{1}{2}}}$$

$$1 + R = \frac{1{,}014^{\frac{1}{2}}(103{,}55 - 101{,}26)}{1{,}26 + 1{,}014^{\frac{1}{2}}}$$

$$R = \frac{1{,}014^{\frac{1}{2}}(103{,}55 - 101{,}26)}{1{,}26 + 1{,}014^{\frac{1}{2}}} - 1$$

$$R = 1{,}72\,\%$$

Točkovanje

Nova cena obveznice iz naloge a) 1 točka.
Nova cena obveznice iz naloge b) 1 točka.*
Enačba, iz katere je mogoče izraziti R, 1+1 točki.*
Rezultat 2 točki.

d) Kolikšno donosnost (v odstotkih) je ustvaril investitor, ki je v času 0 kupil ter pol leta kasneje prodal eno obveznico z letnimi kuponi? [4 točke]

Rešitev

Cena obveznice z letnimi kuponi v času 0,5 je

$$\widetilde{P}_1 = \frac{103{,}55}{1 + 0{,}0172} = 101{,}80 \text{ EUR}.$$

Investitor je obveznico v času 0 kupil za 102,58 EUR, v času 0,5 prejel kupon v višini 3,55 EUR in prodal obveznico za 101,80 EUR.
Ustvarjena (polletna) donosnost znaša

$$\frac{(3{,}55 + 101{,}8) - 102{,}58}{102{,}58} = 2{,}70\,\%.$$

Opomba: Enak rezultat dobimo, če investitor proda obveznico tik red izplačilom kupona v trenutku 0,5, saj še neizplačani kupon poviša ceno obveznice.

Točkovanje

Nova cena obveznice 1 točka.*
Pravilno upoštevanje kupona 1 točka.
Donosnost 1+1 točka.*
Upoštevamo tudi na letno raven preračunano donosnost.

4. Cena delnice podjetja danes znaša 20 EUR. Netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je 3,10 % za vsa dospetja. Uprava podjetja je objavila napoved, da bodo čez štiri mesece izplačevali dividende v višini 3 EUR na delnico.

   a) Banka je pripravljena brezplačno kupiti ali prodati terminski posel na delnico podjetja z ročnostjo čez pol leta. Določi izročitveno ceno v takšnem poslu, če na trgu ni možna arbitraža. [4 točke]

   Rešitev

   Cena delnice je $S_0 = 20$ EUR.
   Dividenda $d = 3$ EUR bo izplačana v trenutku $t' = \frac{1}{3}$ leta.
   Obrestna mera za vsa dospetja je $R = 0{,}031$.
   Ročnost terminskega posla je $T = \frac{1}{2}$ leta.
   Sedanja vrednost dividende je $I(0, \frac{1}{2}) = d \cdot D(0, \frac{1}{3}) = 3(1 + 0{,}031)^{-\frac{1}{3}} = 2{,}9696$ EUR.

   Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$K = \Big(S_0 - I(0,T)\Big)(1+R)^T = (20 - 2{,}9696)(1 + 0{,}031)^{\frac{1}{2}} = 17{,}29 \text{ EUR.}$$

   Druga možnost: Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$K = S_0(1+R)^T - d(1+R)^{T-t'} = 20(1 + 0{,}031)^{\frac{1}{2}} - 3(1 + 0{,}031)^{\frac{1}{6}} = 17{,}29 \text{ EUR.}$$

   Točkovanje

   Formula za izročitveno ceno z dividendo 2 točki.
   Izročitvena cena 2 točki.

   b) Kmalu za tem delničarji na skupščini niso podprli predloga uprave in so sprejeli povišanje dividende na 5 EUR na delnico. Kako in za koliko bi se morala spremeniti izročitvena cena v terminskem poslu, da na trgu še vedno ne bi bila možna arbitraža? [4 točke]

   Rešitev

   Nova dividenda $\widetilde{d} = 5$ EUR bo še vedno izplačana v trenutku $t' = \frac{1}{3}$ leta.
   Sedanja vrednost dividende je $I(0, \frac{1}{2}) = \widetilde{d} \cdot D(0, \frac{1}{3}) = 5(1 + 0{,}031)^{-\frac{1}{3}} = 4{,}9494$ EUR.

   Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$\widetilde{K} = \Big(S_0 - I(0,T)\Big)(1+R)^T = (20 - 4{,}9494)(1 + 0{,}031)^{\frac{1}{2}} = 15{,}28 \text{ EUR.}$$

   Ker je

$$\widetilde{K} - K = -2{,}01 \text{ EUR,}$$

   se mora izročitvena cena v terminskem poslu znižati za 2,01 EUR.

   Druga možnost: Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$\widetilde{K} = S_0(1+R)^T - \widetilde{d}(1+R)^{T-t'} = 20(1 + 0{,}031)^{\frac{1}{2}} - 5(1 + 0{,}031)^{\frac{1}{6}} = 15{,}28 \text{ EUR.}$$

   Točkovanje

   Nova izročitvena cena 2 točki.
   Sprememba cene 1+1 točka.*

c) Banka se na sklep skupščine delničarjev še ni odzvala in je ohranila izročitveno ceno iz naloge a), zato je na trgu možna arbitraža. Pripravi arbitražno strategijo. [12 točk]

Rešitev

Banka ponuja terminske posle s previsoko izročitveno ceno, zato danes kupimo delnico ter prodamo terminski posel (sklenemo kratko pozicijo).
Čez pol leta bomo zato delnico banki prodali za $K = 17{,}29$ EUR.
S transakcijami na bančnem računu poskrbimo, da bodo neto denarni tokovi v vseh trenutkih nenegativni.

Možna arbitražna strategija je naslednja:

- Čas $t = 0$ (danes).
  - Kupimo delnico,
  - banki prodamo terminski posel z izročitveno ceno $K = 17{,}29$ EUR,
  - sposodimo si znesek $K(1+R)^{-T} = 17{,}29 \cdot 1{,}031^{-1/2} = 17{,}03$ EUR do časa $T = \frac{1}{2}$,
  - sposodimo si znesek $\widetilde{d}(1+R)^{-t'} = 5 \cdot 1{,}031^{-1/3} = 4{,}95$ EUR do časa $t' = \frac{1}{3}$.

  Neto denarni tok znaša $-20 + 0 + 17{,}03 + 4{,}95 = 1{,}98$ EUR.
- Čas $t = t' = \frac{1}{3}$ (izplačilo dividende).
  - Prejmemo dividendo,
  - vrnemo znesek 4,95 EUR z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok znaša $5 - 4,95 \cdot 1{,}031^{1/3} = 0$ EUR.
- Čas $t = T = \frac{1}{2}$ (ročnost terminskega posla).
  - Prodamo delnico v skladu s terminskim poslom.
  - vrnemo znesek 17,03 EUR z nastalimi obrestmi.

  Neto denarni tok znaša $17{,}29 - 17{,}03 \cdot 1{,}031^{1/2} = 0$ EUR.

Arbitražni zaslužek smo ustvarili v času 0.

Točkovanje

Ugotovitev, da je moramo terminski posel prodati, 2 točki.
Implementacija arbitraže:

- *Dejanja in denarni tokovi v času $t = 0$ skupaj 4* točke.*
- *Dejanja in denarni tokovi v času $t = \frac{1}{3}$ skupaj 3* točke.*
- *Dejanja in denarni tokovi v času $t = \frac{1}{2}$ skupaj 3* točke.*