Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

14. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Ljubljana, 2. april 2016

Prilepite nalepko s šifro

1. skupina: **Poslovna matematika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

15 zidarjev v 16 dneh pri 8-urnem delavniku zgradi hišo, ki je 10,00 m široka in enako dolga ter 8,80 m visoka.

a) Kakšna bo višina novo zgrajene 22,5 % širše in 20 % krajše hiše, ki jo bo gradilo 14 zidarjev 2 tedna pri 12-urnem delavniku? (1 teden = 7dni)

4 točke

b) Za koliko metrov in odstotkov bo druga hiša višja oziroma nižja od prve?

3 točke

2. NALOGA

Tri podjetja so kot partnerji nastopila na trgu z novim izdelkom. Pri tem so bila pri izdelavi izdelka (od načrtovanja proizvodnje do prodaje na trgu) različno udeležena, in sicer:

OPIS DELEŽA PODJETJA	Podjetje A	Podjetje B	Podjetje C
Število strokovnjakov v podjetju (premo sorazmerno)	3	2	2
Vložena sredstva v projekt v € (premo sorazmerno)	150.000,00	180.000,00	120.000,00
Dohodek od predpogodb in promocij v € (obratno sorazmerno)	45.000,00	40.000,00	20.000,00
»Teža« strokovnjakov (razmerje) (premo sorazmerno)	1	1,5	0,9

a) Kako si bodo podjetja razdelila dobiček pod danimi pogoji v višini 1,200.500,00 EUR? Rezultat izrazi tudi v odstotkih!

4 točke

b) Strokovnjaka podjetja B bosta prejela nagrado za izum. Dogovorita se, da si bosta nagrado razdelila premo sorazmerno glede na vložena sredstva v razmerju 3 : 2, premo sorazmerno glede na vložen čas v razmerju 2 : 5 ter obratno sorazmerno glede na že prejeta sredstva iz predpogodb, ki so v razmerju 1 : 2. Koliko bo prejel drugi izumitelj, če je prvi prejel 5.700,00 EUR?

3 točke

3. NALOGA

Cena kvadratnega metra stanovanja je v začetku leta znašala 1.950,00 EUR, nato pa se je v prvi polovici leta dvakrat zapored zvišala, in sicer maja za 3 %, junija pa za 5 %.

a) Koliko je znašala cena za kvadratni meter stanovanja po posamezni podražitvi? Koliko odstotna je skupna podražitev?

3 točke

b) Koliko odstotna bi morala biti enkratna podražitev/pocenitev, če se cena za m^2 stanovanja junija ne bi zvišala za 5 %, ampak znižala za 5 %?

2 točki

c) Prodajalec stanovanja ponuja dve možnosti pri nakupu stanovanja: prva možnost je takojšnje plačilo 210.900,00 EUR; druga pa s poznejšim plačilom v znesku 225.127,74 EUR z vključenimi 6,75-odstotnimi stroški. Katera ponudba je ugodnejša in zakaj?

2 točki

4. NALOGA

a) Koliko sta Micka in Janez vložila v banko pred 15 leti, če danes po preteku vezave razpolagata z zneskom 125.874,20 EUR. Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 6,20-% letni dekurzivni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

3 točke

b) Micka bo svoj delež, ki znaša 45 % od vloženega, uporabila za nakup avtomobila, ki stane 25.000,00 EUR. Za znesek, ki ji bo zmanjkal, bo najela posojilo za dve leti po dogovorjeni 6-% letni obrestni meri, obrestno obrestnem računu pri semestralni kapitalizaciji. Koliko bo Micko stal novi avto?

4 točke

14. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Ljubljana, 2. april 2016

Prilepite nalepko s šifro

2. skupina: **Statistika**

N1	N2	N3	N4	Skupaj

Naloge rešujte samostojno. Za reševanje imate na voljo 120 minut.
Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog.

1. NALOGA

Nogometna Liga prvakov je najbolj znano klubsko nogometno tekmovanje v Evropi v organizaciji Evropske nogometne zveze (UEFA), ki poteka od leta 1955. Naslov je doslej osvojilo 21 klubov, od tega je to dvanajstim klubom uspelo več kot enkrat.

Tabela 1: **Klubi, ki so največkrat osvojili naslov Lige prvakov**

Klub	**Št. osvojenih naslovov v strukturnem odstotku**	**Število osvojenih naslovov**
Real Madrid	16,67	
Milan	11,67	
Bayern München	8,33	
Liverpool	8,33	
Barcelona	8,33	
Ostali klubi	46,67	
SKUPAJ	100,00	60

Vir: /sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_klubih

a) Izračunajte, kolikokrat je posamezni klub osvojil naslov prvaka v Ligi prvakov. *(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 1.)*

2 točki

V 60-letni zgodovini tekmovanja so naslove osvojili klubi iz 10-ih držav. V tabeli so navedene prve štiri najuspešnejše države.

Tabela 2: **Zmagovalci lige prvakov po državah**

Država	**Št. naslovov prvaka**	**Prvaki iz te države**
Španija	15	Real Madrid (10), Barcelona (5)
Italija	12	Milan (x), Internazionale (x), Juventus (x)
Anglija	12	Liverpool (5), Manchester United (3),Nottingham Forest (2), Chelsea (1), Aston Villa (1)
Nemčija	7	Bayern München (5), Borussia Dortmund (1),Hamburg (1)

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

b) V odstotkih predstavite naslove prvakov angleških klubov glede na skupno število osvojenih naslovov te države in komentirajte rezultate.

3 točke

Tabela 3: **Strukturni odstotek osvojenih naslovov angleških klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	**Št. osvojenih naslovov**	**Strukturni odstotek**
Liverpool	5	
Manchester United	3	
Nottingham Forest	2	
Chelsea	1	
Aston Villa	1	
SKUPAJ	12	100,00

Vir: Tabela 2

Komentar:

c) V spodnji tabeli je zapisana uspešnost najboljših klubov iz Italije. *(Glejte tabelo 2.)*

Tabela 4: **Osvojeni naslovi italijanskih klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	**Št. osvojenih naslovov**	**Strukturni odstotki izraženi v stopinjah**
Milan		210°
Internazionale		90°
Juventus		60°
Skupaj	12	360°

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

Na podlagi podatkov v grafičnem prikazu in tabeli dopolnite spodaj navedene trditve.

2 točki

Milan je osvojil naslov prvaka v tem tekmovanju ________-krat. Internazionale je osvojil naslov prvaka ______________-krat, Juventus je bil prvak _________ -krat.

2. NALOGA

Na srednji šoli »Veleumneži« je zaposlenih 87 učiteljev. Prav tako vemo, da je na šoli 9 dijakov na učitelja.

a) Koliko dijakov obiskuje to srednjo šolo?

2 točki

b) Zapišite enačbo za koeficient, s katerim bi izrazili promil dijakov, ki ponavljajo letnik. Koliko znaša le-ta, če imajo na šoli 12 dijakov ponavljalcev?

2 točki

c) Z ustreznim koeficientom zapišite, da je bilo na 100 dijakov 14 dijakov s statusom športnika.

1 točka

d) Izmed vseh učiteljev jih 8 % poučuje matematiko. Od tega sta dva moška. Zapišite strukturo učiteljev matematike po spolu v odstotkih.

2 točki

3. NALOGA

Iz Slovenije se vsako leto odseli določeno število prebivalcev v tujino. V tabeli so predstavljeni podatki o migracijah naših prebivalcev v letih od 2010 do 2014.

Tabela 5: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih moških in žensk
2010	15937
2011	12024
2012	14378
2013	13384
2014	14336

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

a) Izračunajte spremembe za skupno število odseljenih iz leta v leto z indeksi. Rezultate vpišite v spodnjo tabelo.

1 točka

b) Za skupno število odseljenih izračunajte spremembe v številu odseljenih glede na leto 2014 v obliki indeksov in jih vpišite v spodnjo tabelo.

1 točka

Tabela 6: **Indeksi za odseljene iz Slovenije v tujino po letih**

Leto	V_j	$I_{j/2014}$
2010		
2011		
2012		
2013		
2014		

Vir: Tabela 1

Radovednega dijaka srednje ekonomske šole je zanimalo, koliko je bilo med vsemi odseljenimi iz države žensk in koliko moških. O tem je našel samo nepopolne podatke. Pomagajte mu razrešiti to dilemo s pomočjo spodnje tabele, kjer imate danih nekaj podatkov.

Tabela 7: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino po spolu v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih	Moški	Ženske	$I_{j/2010}$ moški	$I_{j/2011}$ ženske	S_j moški	V_j ženske
2010	15937		4351				
2011	12024						
2012	14378			75,08			146,63
2013	13384				141,54		
2014	14336					8,95	

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

c) Izračunajte število moških in žensk, odseljenih po posameznih letih. *(Rezultate zaokrožite na cela števila.)*

2 točki

d) Dopolnite navedene trditve in podčrtajte pravilne trditve. **3 točke**

Število žensk, odseljenih iz države leta 2012, je bilo glede na leto 2011 za ________ odstotka ***večje/manjše***.

Število žensk, odseljenih iz države leta 2013, je bilo glede na leto 2011 za ______ odstotka ***večje/manjše***.

Leta 2012 se je iz države odselilo ________ odstotka ***več/manj*** moških kot leta 2010.

Stopnja rasti za moške v letu 2014 je bila ***pozitivna /negativna*** .

4. NALOGA

Tabela 8: **Delavci podjetja MERX Celje po zaslužkih v mesecu septembru 2015**

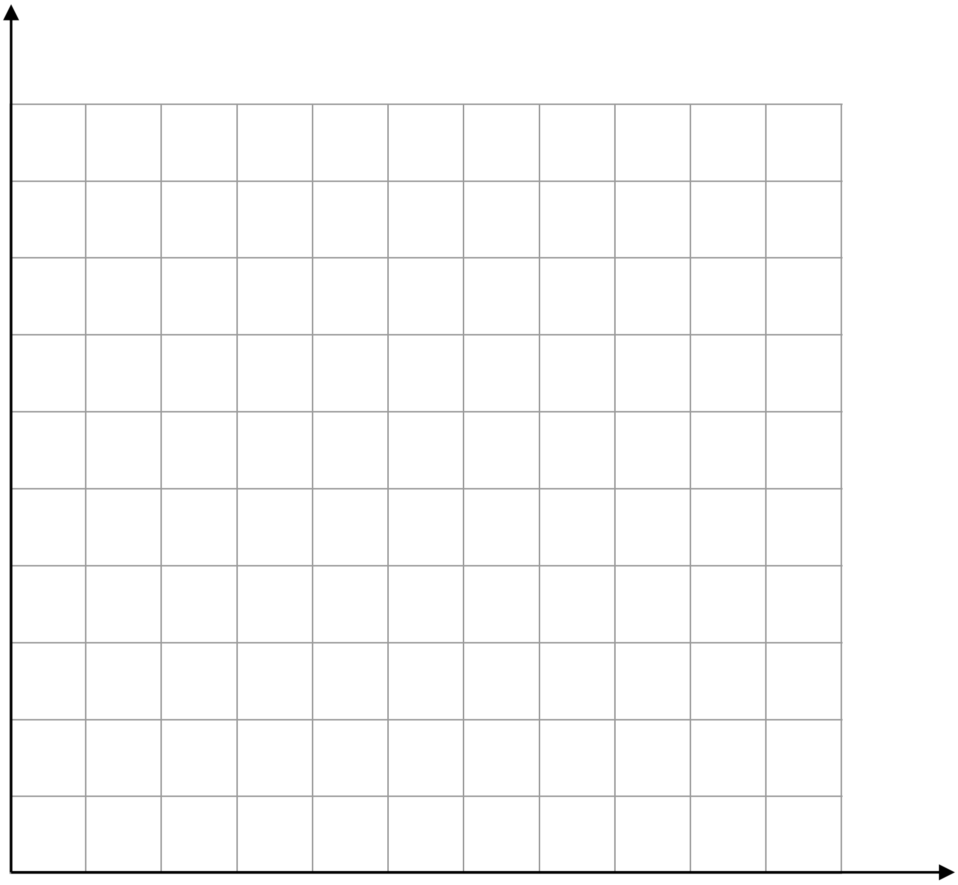
Zaslužek v EUR	**Št. delavcev f_j**	
nad 700 do 900	5	
nad 900 do 1.100	14	
nad 1.100 do 1.300	20	
nad 1.300 do 1.500	32	
nad 1.500 do 1.700	22	
nad 1.700 do 1.900	15	
nad 1.900 do 2.100	6	
Skupaj	**114**	

Vir: Izmišljeni podatki

a) Izračunajte zaslužek, od katerega je polovica delavcev zaslužila več, druga polovica pa manj.

2 točki

b) Grafično prikažite kumulativo frekvenc. **3 točke**



c) Grafično ocenite število delavcev, ki so zaslužili nad 1.250,00 do 1.650,00 evrov.

1 točka

d) Grafično ocenite, koliko odstotkov delavcev je zaslužilo nad 1.750,00 evrov.

1 točka

dMFA

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

2. april 2016

Prilepi nalepko s šifro

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.
Dovoljena je uporaba žepnega računala.
Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.
Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

N1	N2	N3	N4

1. V tabeli so prikazani podatki o povprečni temperaturi zraka, povprečni maksimalni dnevni temperaturi zraka, povprečni minimalni dnevni temperaturi zraka, trajanju sončnega obsevanja, številu dni z nevihto ter številu dni z dnevno količino padavin nad 0,1 mm v posameznih mesecih leta 2015 za kraj Bilje pri Novi Gorici (nadmorska višina 55 m).

Mesec	Povp. temp. [°C]	Povp. maks. temp. [°C]	Povp. min. temp. [°C]	Trajanje sonca [h]	Št. dni z nevihto	Št. dni s padavinami
januar	4,6	10,0	0,4	94,0	0	10
februar	5,1	10,3	0,7	129,4	0	10
marec	9,2	15,0	4,1	193,0		8
april	11,8	18,5	5,7	240,1	0	8
maj	17,6	23,3	12,4	224,9		13
junij	21,5	28,1	14,8	292,7		12
julij		32,1	18,9	334,0	6	9
avgust	23,0	30,6	17,2	293,4	4	10
september	18,4	24,2	13,4	204,1	5	11
oktober	13,1	18,7	9,1	142,5	3	18
november	7,9	14,3	3,2	144,9	0	10
december	4,7	10,5	0,6	99,1	1	11

Vir: Agencija Republike Slovenije za okolje

Rezultate zaokroži na eno decimalno mesto.

a) Izračunaj povprečno dnevno trajanje sončnega obsevanja za poletje 2015?
Meteorološko poletje traja od 1. junija do 31. avgusta. [3 točke]

b) V katerem mesecu v prvi polovici leta 2015 je bila razlika med povprečno maksimalno in povprečno minimalno temperaturo zraka največja in koliko je znašala? [3 točke]

c) V juniju je bilo šest dni z nevihto več kot v maju, v marcu pa en dan manj kot v maju. Izračunaj število dni z nevihto v marcu, maju in juniju, če je bilo v celem letu v povprečju 2,5 dneva z nevihto na mesec. [5 točk]

d) Izračunaj modus in mediano števila dni v mesecu, ko je padlo več kot 0,1 mm padavin. Podatke o številu dni s padavinami prikaži s škatlo z brki. [6 točk]

e) Kolikšna je bila povprečna temperatura zraka v juliju, če je bila povprečna temperatura zraka poleti 23,3°C? [3 točke]

2. Komitenti bank se pri najemanju potrošniških kreditov srečujemo z vrsto omejitev. Ena izmed njih je, da višina mesečne anuitete ne sme presegati tretjine vsote rednih mesečnih prilivov na naš bančni račun.

   Za potrošniške kredite banka uporablja konformno mesečno obrestovanje z letno obrestno mero 4 %. Privzemi, da imamo redne mesečne dohodke v višini 900 EUR.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Največ kolikšen potrošniški kredit z odplačilno dobo 24 mesecev lahko najamemo? Privzemi, da prvi obrok kredita plačamo mesec dni po najemu. [7 točk]

   b) S potrošniškim kreditom želimo kupiti novo opremo dnevne sobe, ki stane 4200 EUR. Kolikšna mora biti odplačilna doba kredita, če želimo dolg povrniti z najvišjimi še dovoljenimi anuitetami? [7 točk]

c) Banka nam odobri kredit za novo opremo iz b) in dovoli, da vse anuitete razen zadnje znašajo 300 EUR. Koliko znaša zadnji obrok? [6 točk]

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja. Čas t merimo v letih.

t	1	2	3
$R(0,t)$	2,00 %	2,50 %	3,00 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata dospetje čez 3 leta in izplačujeta letne kupone, prvega čez natanko eno leto.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Prva obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 4 %. Določi njeno ceno v času 0. [4 točke]

b) Druga obveznica je amortizacijska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 3 %. Ta obveznica ob vsakem kuponu izplača še tretjino svoje nominalne vrednosti. Določi denarne tokove amortizacijske obveznice. Za vsak denarni tok zapiši izplačani znesek in trenutek izplačila.

Upoštevaj, da je kupon izplačan ob koncu obrestovalnega obdobja in da je njegova višina odvisna od preostale nominalne vrednosti po izplačilu prejšnjega kupona. [4 točke]

c) Določi ceno amortizacijske obveznice v času 0. [2 točki]

d) Kolikšen bi moral biti letni kupon klasične kuponske obveznice iz naloge a), da bi bila njena cena v času 0 enaka ceni amortizacijske obveznice iz naloge c)? [3 točke]

e) Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera amortizacijske obveznice iz naloge b), da bi bila njena cena enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a)? [6 točk]

4. Cena delnice podjetja A trenutno znaša 50 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pa je 2 % za vsa dospetja. Delnica bo čez tri mesece izplačala dividendo v višini 3 EUR.

   Na delnico sta izdani evropska in ameriška nakupna opcija z zapadlostjo čez eno leto in izvršilno ceno 47 EUR.

   a) Kaj lahko poveš o premiji evropske nakupne opcije? Zapiši interval cen, ki ne omogočajo arbitraže. [6 točk]

   b) Ali je možna arbitraža, če je premija evropske nakupne opcije 2 EUR, premija ameriške nakupne pa 1,80 EUR? Če da, opiši arbitražno strategijo. [6 točk]

c) Takoj po izplačilu dividend obrestne mere vztrajajo pri 2 % za vsa dospetja, cena delnice se je ustalila pri 48 EUR, cena evropske nakupne opcije pa pri 1,50 EUR. Pokaži, da je s tem možna arbitraža, in pripravi arbitražno strategijo, ki vključuje natanko eno evropsko nakupno opcijo. [8 točk]

List s formulami

Terminski posli

- na delnico brez dividend

  $F_t = S_t(1+R)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- na delnico z dividendo

  $F_t = S_t(1+R)^{T-t} - I_{t'}(1+R)^{T-t'}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- na vrednostni papir z znanim donosom

  $F_t = S_t\left(\frac{1+R}{1+R_0}\right)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = (F_t - K)(1+R)^{-(T-t)}$

- na menjalni tečaj

  $F_t = S_t\left(\frac{1+R_d}{1+R_f}\right)^{T-t}, \quad K = F_0$

  $V_t = N(F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$

  $V_t^1 = (F_t - K)(1+R_d)^{-(T-t)}$

- dogovor o terminski obrestni meri

  $K = R(0,S,T) = \frac{1}{T-S}\left(\frac{1+R(0,T)T}{1+R(0,S)S} - 1\right)$

  $V_t = N(T-S)(R(t,S,T)-K)\cdot\frac{1}{1+R(t,T)(T-t)}$

  $V_S = N\cdot(T-S)\cdot(R(S,T)-K)\cdot\frac{1}{1+R(S,T)(T-S)}$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

  $C_T = \max\{S_T - K, 0\}$

  $P_T = \max\{K - S_T, 0\}$

- premija v času t, če delnica ne izplačuje dividend

  $\max\{S_t - K\cdot(1+R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$

  $\max\{K\cdot(1+R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K\cdot(1+R)^{-(T-t)}$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica ne izplačuje dividend

  $p_t + S_t = c_t + K\cdot(1+R)^{-(T-t)}.$

- premija v času t, če delnica izplačuje dividende

  $I(t,T)$ je vrednost v času t vseh dividend izplačanih od t do T.

  $\max\{S_t - K\cdot(1+R)^{-(T-t)} - I(t,T), 0\} \leq c_t \leq S_t$

  $\max\{K\cdot(1+R)^{-(T-t)} - S_t + I(t,T), 0\} \leq p_t \leq K\cdot(1+R)^{-(T-t)}$

- evropska nakupno-prodajna enakost, če delnica izplačuje dividende

  $p_t + S_t = c_t + K\cdot(1+R)^{-(T-t)} + I(t,T)$

14. državno tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole
Ljubljana, 2. april 2016

1. skupina: **Poslovna matematika - rešitve**

1. NALOGA

15 zidarjev v 16 dneh pri 8-urnem delavniku zgradi hišo, ki je 10 m široka in enako dolga ter 8,8 m visoka.

a) Kakšna bo višina novo zgrajene 22,5 % širše in 20 % krajše hiše, ki jo bo gradilo 14 zidarjev 2 tedna pri 12-urnem delavniku? (1 teden = 7dni)

4 točke

15 zidarjev	16 dni	8 ur	10 m (š)	10 m (d)	8,8 m (v)
↑	↑	↑	↓	↓	↑
14 zidarjev	14 dni	12 ur	12,25 m (š)	8 m (d)	x m (v)

$$x = \frac{8{,}8 \ x \ 14 \, x \ \ 14 \, x \, 12 \, x \, 10 \, x \, 10}{15 \, x \, 16 \ x \ 8 \ x \ 12{,}25 \ x \, 8} = \underline{\mathbf{11\ m\ (v)}}$$

1 točka izračun dolžine in širine
1 točka zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje …)
1 točka določitev vrste sorazmerij
1 točka izračun višine

b) Za koliko metrov in odstotkov bo druga hiša višja oziroma nižja od prve?

3 točke

Razlika višine: 11 m – 8,8 m = **2,2 m**

8,8 m (v)	100 %
↑	↑
2,2 m (v)	X %

$x = \frac{2{,}20 * 110}{8{,}80} =$ **25 %** (Odgovor: Druga hiša bo za 25 % višja od prve.)

1 točka izračun višine v metrih
1 točka zapis podatkov (sklepna shema, enačba …)
1 točka izračun in odgovor

2. NALOGA

Tri podjetja so kot partnerji nastopila na trgu z novim izdelkom. Pri tem so bila pri izdelavi izdelka (od načrtovanja proizvodnje do prodaje na trgu) različno udeležena, in sicer:

OPIS DELEŽA PODJETJA	Podjetje A	Podjetje B	Podjetje C
Število strokovnjakov pri podjetju (premo sorazmerno)	3	2	2
Vložena sredstva v projekt (EUR) (premo sorazmerno)	150.000,00	180.000,00	120.000,00
Dohodek od predpogodb in promocij (EUR) (obratno sorazmerno)	45.000,00	40.000,00	20.000,00
»Teža« strokovnjakov (razmerje) (premo sorazmerno)	1	1,5	0,9

a) Kako si bodo podjetja razdelila dobiček pod danimi pogoji v višini 1,200.500,00 EUR? Rezultat izrazi tudi v odstotkih!

4 točke

Podjetja	Kriterij delitve				Enostavna razmerska števila	Odgovor	
	Število strokovnjakov	Vložena sred.	Dohodek	»Teža« strokovnjaka		v EUR	v %
A	3	150.000,00	$\frac{1}{45.000,00}$	1	10,0 x	**350.000,00 EUR**	**29,15 %**
B	2	180.000,00	$\frac{1}{40.000,00}$	1,5	13,5 x	**472.500,00 EUR**	**39,36 %**
C	2	120.000,00	$\frac{1}{20.000,00}$	0,9	10,8 x	**378.000,00 EUR**	**31,49 %**

34,3 x = 1,200.500,00

x = 35.000,00

1 točka nastavitev kriterijev
1 točka izračun osnovnega deleža x
1 točka izračun zneska dobička v EUR
1 točka izračun zneska dobička v odstotkih

b) Strokovnjaka podjetja B bosta prejela nagrado za izum. Dogovorita se, da si bosta nagrado razdelila premo sorazmerno glede na vložena sredstva v razmerju 3 : 2, premo sorazmerno glede na vložen čas v razmerju 2 : 5 ter obratno sorazmerno glede na že prejeta sredstva iz predpogodb, ki so v razmerju 1 : 2. Koliko bo prejel drugi izumitelj, če je prvi prejel 5.700,00 EUR?

3 točke

Strokovnjak	Kriterij delitve			Enostavna razmerska števila	Odgovor
	Vložena sredstva	Vložen čas	Prejeta sredstva iz predpogodb		
Prvi	3	2	1	6 x	///////////////
Drugi	2	5	$\frac{1}{2}$	5 x	4.750,00 EUR

6 x = 5.700,00

x = 950,00

1 točka nastavitev kriterijev
1 točka izračun osnovnega deleža x
1 točki izračun nagrade drugega izumitelja

3. NALOGA

Cena kvadratnega metra stanovanja je v začetku leta znašala 1.950,00 EUR, nato pa se je v prvi polovici leta dvakrat zapored zvišala, in sicer maja za 3 %, junija pa za 5 %.

a) Koliko je znašala cena za kvadratni meter stanovanja po posamezni podražitvi? Koliko odstotna je skupna podražitev?

3 točke

Cena za m^2 = 1.950,00 * 1,03 = <u>2.008,50 EUR/ m^2</u>
Cena za m^2 = 1.950,00 * 1,03 * 1,05 = <u>2.108,93 EUR/ m^2</u>

Izračun Σ podražitve v % = $\frac{(2.108{,}93 - 1.950{,}00) x 100}{1950{,}00} = \frac{158{,}93 \ x\ 100}{1950{,}00}$ = <u>8,15 %</u>

1 točka izračun cene/m^2 za maj
1 točka izračun cene/m^2 za junij
1 točka izračun Σ podražitve v odstotkih

b) Koliko odstotna bi morala biti enkratna <u>podražitev</u> / <u>pocenitev</u>, če se cena za m^2 stanovanja junija ne bi zvišala za 5 %, ampak znižala za 5 %?

2 točki

Cena za m^2 = 1.950,00 * 1,03 = 2.008,50 EUR/ m^2
Cena za m^2 = 2.008,50 * 0,95 = <u>**1.908,08 EUR/ m^2**</u>

Izračun Σ <u>pocenitve</u> v % = $\frac{(1{,}950{,}00 - 1.908{,}08) x 100}{1.950{,}00} = \frac{41{,}92 \ x\ 100}{1.950{,}00}$ = <u>**2,15 %** pocenitev</u>

1 točka izračun nove cene/m^2 za junij
1 točka izračun <u>Σ pocenitve</u> v odstotkih

c) Prodajalec stanovanja ponuja dve možnosti pri nakupu stanovanja: prva možnost je takojšnje plačilo 210.900,00 EUR; druga pa s poznejšim plačilom v znesku 225.127,74 EUR z vključenimi 6,75-odstotnimi stroški. Katera ponudba je ugodnejša in zakaj?

2 točki

C^+ = 225.127,75 EUR
<u>p = 6,75%</u>
C = ? EUR

106,75 % …………….. 225.127,74 EUR
<u>100 % ……………… x EUR</u>

x = $\frac{100 \ * 225.127{,}74}{106{,}75}$ = <u>**210.892,50 EUR**</u>

Odg.: Druga ponudba je ugodnejša zaradi nižje cene (<u>**210.892,50 €**</u>**<** 210.900,00 €).

1 točka izračun celote druge ponudbe
1 točka zapis odgovora

4. NALOGA

a) Koliko sta Micka in Janez vložila v banko pred 15 leti, če danes po preteku vezave razpolagata z zneskom 125.874,20 EUR. Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 6,20-% letni dekurzivni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

3 točke

r = $1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6{,}20}{100} = 1{,}062$

$G_n = G_0 * r^n$

$G_0 = \frac{Gn}{r^n}$

$G_0 = \frac{125.874{,}20}{1{,}062^{15}}$ = **51.058,61 EUR**

1 točka izračun obrestnega faktorja (r)
1 točka izpeljava obrazca in vstavitev podatkov
1 točka izračun G_0

b) Micka bo svoj delež, ki znaša 45 % od vloženega, uporabila za nakup avtomobila, ki stane 25.000,00 EUR. Za znesek, ki ji bo zmanjkal, bo najela posojilo za dve leti po dogovorjeni 6-% letni obrestni meri, obrestno obrestnem računu pri semestralni kapitalizaciji. Koliko bo Micko stal novi avto?

4 točke

45 % delež = $\frac{51.058{,}61 \, x \, 45}{100}$ = **22.976,37 EUR**

Manjkajoči znesek = 25.000,00 – 22.976,37 = **2.023,63 EUR**

$p' = \frac{p.a.}{m} = \frac{6\ \%}{2} = 3\ \%$

$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$

$G_n = G_0 * r'^{(n*m)}$

$G_n = 2.023{,}63 *(1{,}03)^{(4)}$ = **2.277,61 EUR**

obresti = 2.277,61 – 2.023,63 = **253,98 EUR**

Odgovor: Micko bo novi avto stal **25.253,98 EUR**.

1 točka izračun 45 % deleža
1 točka izračun manjkajočega zneska
1 točka izračun končne glavnice G_n
1 točka odgovor

1. NALOGA

Nogometna Liga prvakov je najbolj znano klubsko nogometno tekmovanje v Evropi v organizaciji Evropske nogometne zveze (UEFA), ki poteka od leta 1955. Naslov je doslej osvojilo 21 klubov, od tega je to dvanajstim klubom uspelo več kot enkrat.

Tabela 1: **Klubi, ki so največkrat osvojili naslov Lige prvakov**

Klub	**Št. osvojenih naslovov v strukturnem odstotku**	**Število osvojenih naslovov**
Real Madrid	16,67	10
Milan	11,67	7
Bayern München	8,33	5
Liverpool	8,33	5
Barcelona	8,33	5
Ostali klubi	46,67	28
SKUPAJ	100,00	60

Vir: /sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_klubih

a) Izračunajte, kolikokrat je posamezni klub osvojil naslov prvaka v Ligi prvakov. *(Rezultate zaokrožite na celo število.)*

2 točki

1 točka za tri pravilno izračunane podatke
2 točki za vse pravilno izračunane podatke

V 60-letni zgodovini tekmovanja so naslove osvojili klubi iz 10-ih držav. V tabeli so navedene prve štiri najuspešnejše države.

Tabela 2: **Zmagovalci lige prvakov po državah**

Država	**Št. naslovov prvaka**	**Prvaki iz te države**
Španija	15	Real Madrid (10), Barcelona (5)
Italija	12	Milan (x), Internazionale (x), Juventus (x)
Anglija	12	Liverpool (5), Manchester United (3),Nottingham Forest (2), Chelsea (1), Aston Villa (1)
Nemčija	7	Bayern München (5), Borussia Dortmund (1),Hamburg (1)

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

b) V odstotkih predstavite naslove prvakov angleških klubov glede na skupno število osvojenih naslovov te države in komentirajte rezultate.

3 točke

Tabela 3: **Strukturni odstotek osvojenih naslovov angleških klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	**Št. osvojenih naslovov**	**Strukturni odstotek**
Liverpool	5	41,67
Manchester United	3	25,00
Nottingham Forest	2	16,67
Chelsea	1	8,33
Aston Villa	1	8,33
SKUPAJ	12	100,00

Vir: Tabela 2

Komentar:
Klub Liverpool je osvojil 41,67 % vseh osvojenih naslovov, ki so jih osvojili angleški klubi. 25 % osvojenih naslovov angleških klubov je prispeval klub Manchester United, Nottingham Forest je osvojil 16,67 % osvojenih naslovov, Chelsea in Aston Villa pa sta osvojila vsak po 8,33 % vseh osvojenih naslovov.

2 točki za vse pravilno izračunane odstotke
1 točka v primeru 1 napake
0 točk v primeru več napak
1 točka za pravilno razlago odstotkov

c) V spodnji tabeli je zapisana uspešnost najboljših klubov iz Italije.

Tabela 4: **Osvojeni naslovi italijanskih klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	**Št. osvojenih naslovov**	**Strukturni odstotki izraženi v stopinjah**
Milan		210°
Internazionale		90°
Juventus		60°
Skupaj	12	360°

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

Vir: Tabela 4

d) Na podlagi podatkov v grafičnem prikazu in tabeli dopolnite spodaj navedene trditve.

2 točki

Milan je osvojil naslov prvaka v tem tekmovanju **7**-krat. Internazionale je osvojil naslov prvaka **3-**krat, Juventus je bil prvak **2-**krat.

2 točki za vse pravilno dopolnjene podatke
1 točka v primeru 1 napake
0 točk v primeru več napak

2. NALOGA

Na srednji šoli »Veleumneži« je zaposlenih 87 učiteljev. Prav tako vemo, da je na šoli 9,02 dijaka na učitelja.

a) Koliko dijakov obiskuje to srednjo šolo?

2 točki

$$K = \frac{št.dijakov}{št.\ učiteljev}$$

$9 = \frac{x}{87}$ x = 783 dijakov

Odgovor: Šolo obiskuje 785 dijakov.

1 točka za pravilno izračunano število dijakov in 1 točka za pravilen odgovor

b) Zapišite enačbo za koeficient, s katerim bi izrazili promil dijakov, ki ponavljajo letnik. Koliko znaša le-ta, če imajo na šoli 12 dijakov ponavljalcev?

2 točki

$$\mathrm{K} = \frac{\text{št.ponavljalcev}}{\text{št.dijakov}} \cdot 1000$$

1 točka za pravilno zapisan statistični koeficient

$\boldsymbol{K = \frac{12}{783} \cdot 1000 = 15,33}$ **dijaka ponavljalca na 1000 dijakov**

1 točka za pravilno izračunano število ponavljalcev na 1000 dijakov

c) Z ustreznim koeficientom zapišite, da je bilo na 100 dijakov 14 dijakov s statusom športnika.

1 točka

$$K = \frac{Št.dijakov\ športnikov}{Št.vseh\ dijakov} * 100 = 14\ dijakov\ športnikov\ na\ 100\ dijakov$$

1 točka za pravilno zapisan statistični koeficient

d) Izmed vseh učiteljev jih 8 % poučuje matematiko. Od tega sta dva moška. Zapišite strukturo učiteljev matematike po spolu v odstotkih.

2 točki

8 % od 87 = 7 učiteljev matematike

$Y_{moški}$ % = 28,57
$Y_{ženske}$ % = 71,43

1 točka za pravilno izračunano število učiteljev matematike
1 točka za pravilno izračunan odstotek moških in žensk

3. NALOGA

Iz Slovenije se vsako leto odseli določeno število prebivalcev v tujino. V tabeli so predstavljeni podatki o migracijah naših prebivalcev v letih od 2010 do 2014.

Tabela 5: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih moških in žensk
2010	15937
2011	12024
2012	14378
2013	13384
2014	14336

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

a) Izračunajte spremembe za skupno število odseljenih iz leta v leto z indeksi. Rezultate vpišite v spodnjo tabelo. **1 točka**

1 točka za vse pravilno izračunane indekse

b) Za skupno število odseljenih izračunajte spremembe v številu odseljenih glede na leto 2014 v obliki indeksov in jih vpišite v spodnjo tabelo.

1 točka

1 točka za vse pravilno izračunane indekse

Tabela 6: **Indeksi za odseljene iz Slovenije v tujino po letih**

Leto	Vj	$I_{j/2014}$
2010	-	111,67
2011	75,45	83,87
2012	119,58	100,29
2013	93,09	93,36
2014	107,11	100,00

Vir: Tabela 1

Radovednega dijaka srednje ekonomske šole je zanimalo, koliko je bilo med vsemi odseljenimi iz države žensk in koliko moških. O tem je našel samo nepopolne podatke. Pomagajte mu razrešiti to dilemo s pomočjo spodnje tabele, kjer imate danih nekaj podatkov.

Tabela 7: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino po spolu v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih	Moški	Ženske	$I_{j/2010}$ moški	$I_{j/2011}$ ženske	S_j moški	V_j ženske
2010	15937	11586	4351				
2011	12024	8151	3873				
2012	14378	8699	5679	75,08			146,63
2013	13384	7902	5482		141,54		
2014	14336	8609	5727			8,95	

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

c) Izračunajte število moških in žensk, odseljenih po posameznih letih. *(Rezultate zaokrožite na cela števila.)*

2 točki

1 točka za pravilno izračunano število moških

1 točka za pravilno izračunano število žensk

d) Dopolnite navedene trditve in podčrtajte pravilne trditve. **3 točke**

Število žensk, odseljenih iz države leta 2012, je bilo glede na leto 2011 za **46,63** % ***večje*** / *manjše*.

Število žensk, odseljenih iz države leta 2013, je bilo glede na leto 2011 za **41,54** % ***večje*** /*manjše*.

Leta 2012 se je iz države odselilo **24,92** % več / **manj** moških kot leta 2010.
Stopnja rasti za moške v letu 2014 je bila ***pozitivna*** /*negativna* .

1 točka za vsako pravilno dopolnjeno trditev

4. NALOGA

Tabela 8: **Delavci podjetja MERX Celje po zaslužkih v mesecu septembru 2015**

Zaslužek v EUR	**Delavci f_j**	F_j
nad 700 do 900	5	5
nad 900 do 1.100	14	19
nad 1.100 do 1.300	20	39
nad 1.300 do 1.500	32	71
nad 1.500 do 1.700	22	93
nad 1.700 do 1.900	15	108
nad 1.900 do 2.100	6	114
Skupaj	**114**	

Vir: Izmišljeni podatki

a) Izračunajte zaslužek, od katerega je polovica delavcev zaslužila več, druga polovica pa manj.

2 točki

$$R = \frac{N+1}{2} = \frac{114+1}{2} = 57{,}5$$

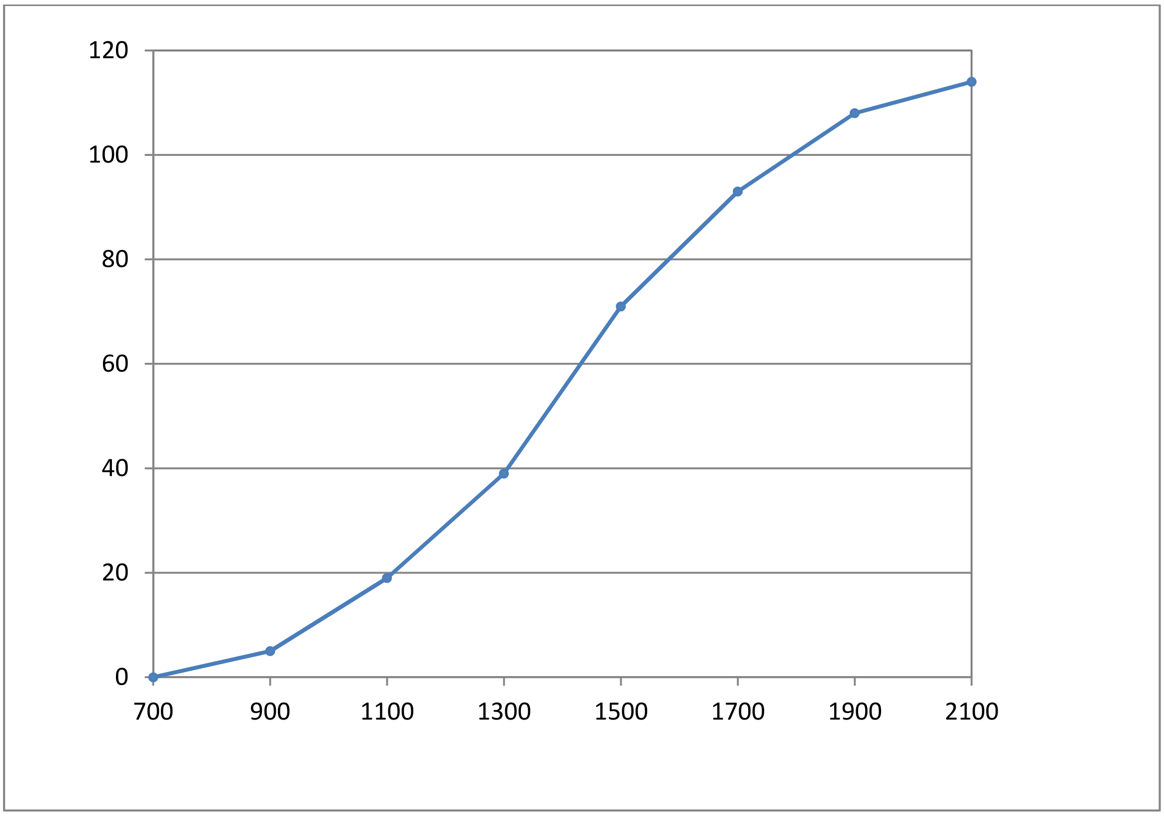
Medialni razred: nad 1.300 do 1.500

$$Me = 1.300 + 200 \cdot \frac{57{,}5 - 39}{32} = 1.415{,}63\ EUR$$

Me = 1.415,63 EUR

1 točka za nastavitev mediane
1 točka za pravilno izračunano mediano

b) Grafično prikažite kumulativo frekvenc. **3 točke**



3 točke za pravilno narisan grafikon z naslovi osi in naslovom grafikona
- 1 točka, če manjka naslov grafikona
- 1 točka, če manjkajo naslovi osi

c) Grafično ocenite število delavcev, ki so zaslužili nad 1.250,00 do 1.650,00 evrov.

1 točka

cca. 50 – 51 delavcev

1 točka za pravilno ocenjeno število delavcev

d) Grafično ocenite, koliko odstotkov delavcev je zaslužilo nad 1.750,00 evrov.

1 točka

cca. 14 odstotkov delavcev

1 točka za pravilno ocenjen odstotek delavcev

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

2. april 2016

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih tekmovalec dobi tudi ob prenosu napake. Točke brez zvezdice tekmovalec dobi le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V tabeli so prikazani podatki o povprečni temperaturi zraka, povprečni maksimalni dnevni temperaturi zraka, povprečni minimalni dnevni temperaturi zraka, trajanju sončnega obsevanja, številu dni z nevihto ter številu dni z dnevno količino padavin nad 0,1 mm v posameznih mesecih leta 2015 za kraj Bilje pri Novi Gorici (nadmorska višina 55 m).

Mesec	Povp. temp. [°C]	Povp. maks. [°C]	Povp. min. [°C]	Razlika [°C]	Trajanje sonca [h]	Št. dni z nevihto	Št. dni s padavinami
januar	4,6	10,0	0,4	9,6	94,0	0	10
februar	5,1	10,3	0,7	9,6	129,4	0	10
marec	9,2	15,0	4,1	10,9	193,0		8
april	11,8	18,5	5,7	12,8	240,1	0	8
maj	17,6	23,3	12,4	10,9	224,9		13
junij	21,5	28,1	14,8	13,3	292,7		12
julij		32,1	18,9		334,0	6	9
avgust	23,0	30,6	17,2		293,4	4	10
september	18,4	24,2	13,4		204,1	5	11
oktober	13,1	18,7	9,1		142,5	3	18
november	7,9	14,3	3,2		144,9	0	10
december	4,7	10,5	0,6		99,1	1	11

Vir: Agencija Republike Slovenije za okolje

Rezultate zaokroži na eno decimalno mesto.

a) Izračunaj povprečno dnevno trajanje sončnega obsevanja za poletje 2015? Meteorološko poletje traja od 1. junija do 31. avgusta. [3 točke]

Rešitev

V juniju, juliju in avgustu je sončno obsevanje trajalo $292{,}7 + 334{,}0 + 293{,}4 = 920{,}1$ ure.
Meteorološko poletje ima $30 + 31 + 31 = 92$ dni.

Povprečno dnevno trajanje sončnega obsevanja je bilo $\frac{920{,}1}{92} = 10{,}0$ ur.

Točkovanje

Skupno število ur sončnega obsevanja 1 točka.
Število dni v meteorološkem poletju 1 točka.
Rezultat 1 točka.

b) V katerem mesecu v prvi polovici leta 2015 je bila razlika med povprečno maksimalno in povprečno minimalno temperaturo zraka največja in koliko je znašala? [3 točke]

Rešitev

Razlike med povprečno maksimalno in povprečno minimalno temperaturo so zapisane v tabeli.

Razlika je bila največja v juniju in je znašla 13,3°C.

Točkovanje

Razlike temperatur po mesecih 2 točki (1 točka za 3 pravilne vrednosti).

Izbira pravega meseca 1 točka.

c) V juniju je bilo šest dni z nevihto več kot v maju, v marcu pa en dan manj kot v maju. Izračunaj število dni z nevihto v marcu, maju in juniju, če je bilo v celem letu v povprečju 2,5 dneva z nevihto na mesec. [5 točk]

Rešitev

Označimo število dni z nevihto v maju z x. Junija je bilo takih dni $x+6$, v marcu pa $x-1$.

Iz enačbe za povprečje

$$\frac{(x-1)+x+(x+6)+19}{12}=2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x+24}{12}=2{,}5$$

izračunamo $x=2$.

V marcu je bil 1 dan z nevihto, v maju sta bila 2 in v juniju 8 dni z nevihto.

Točkovanje

Smiselna vpeljava neznanke in ustrezna enačba na osnovi povprečja 1+1 točka.

Rešitev enačbe 1 točka.*

Odgovor (vse tri vrednosti) 2 točki.

d) Izračunaj modus in mediano števila dni v mesecu, ko je padlo več kot 0,1 mm padavin. Podatke o številu dni s padavinami prikaži s škatlo z brki. [6 točk]

Rešitev

Podatke uredimo od najmanjšega do največjega.

8, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 18

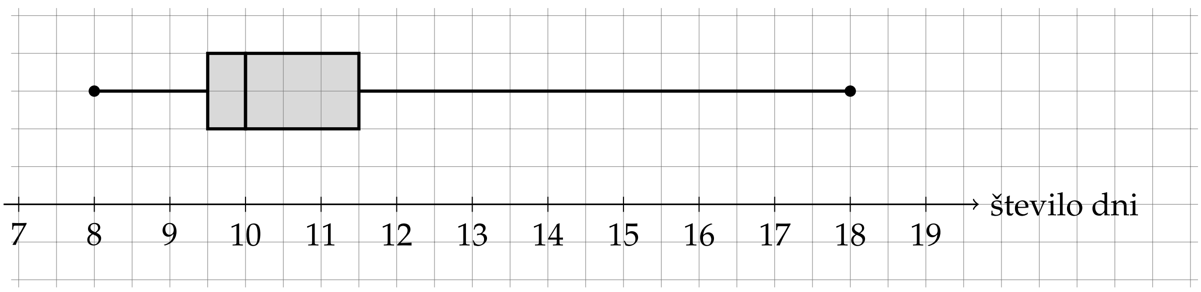
Največkrat se pojavi vrednost 10, zato je modus enak Mo = 10.

Šesti in sedmi podatek v urejenem nizu sta enaka 10, zato je mediana enaka Me = 10.

Izračunamo še prvi kvartil $Q_1=\frac{9+10}{2}=9{,}5$ in tretji kvartil $Q_3=\frac{11+12}{2}=11{,}5$.

Škatla se razteza od prvega do tretjega kvartila, vmes označimo mediano.

Brka se raztezata od kvartilov do najvišje oziroma najnižje vrednosti.



Točkovanje

Modus in mediana 1+1 točka.

Kvartili (lahko samo razvidno iz grafa) 1+1 točka.

Grafični prikaz: škatla 1 točka, brki 1 točka.

Upoštevamo tudi drugačen izračun kvartilov in drugačne dolžine brkov, če so ustrezno utemeljeni.

e) Kolikšna je bila povprečna temperatura zraka v juliju, če je bila povprečna temperatura zraka poleti 23,3°C? [3 točke]

Rešitev

Označimo povprečno temperaturo v juliju z y.

Povprečna temperatura v meteorološkem letnem času je utežena aritmetična sredina objavljenih povprečij, uteži so sorazmerne številom dni v posameznih mesecih.

Povprečna temperatura zraka poleti je bila

$$\mu = \frac{30 \cdot 21{,}5 + 31y + 31 \cdot 23}{30 + 31 + 31} = \frac{31y + 1358}{92}.$$

Iz enačbe

$$\frac{31y + 1358}{92} = 23{,}3$$

dobimo $y = 25{,}3$°C.

Točkovanje

Uporaba utežene aritmetične sredine (utež sorazmerna številu dni) 1 točka.

Enačba, iz katere je mogoče izraziti y, 1 točka.

Rezultat 1 točka.

Če tekmovalec ne upošteva števila dni v mesecih, dobi 1 točko.

2. Komitenti bank se pri najemanju potrošniških kreditov srečujemo z vrsto omejitev. Ena izmed njih je, da višina mesečne anuitete ne sme presegati tretjine vsote rednih mesečnih prilivov na naš bančni račun.

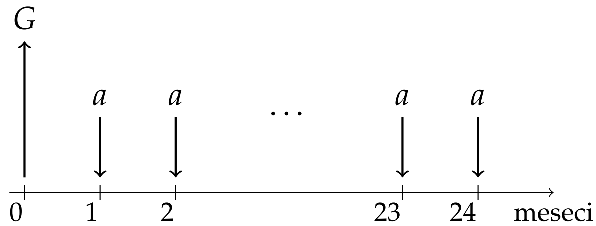
   Za potrošniške kredite banka uporablja konformno mesečno obrestovanje z letno obrestno mero 4 %. Privzemi, da imamo redne mesečne dohodke v višini 900 EUR.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Največ kolikšen potrošniški kredit z odplačilno dobo 24 mesecev lahko najamemo? Privzemi, da prvi obrok kredita plačamo mesec dni po najemu. [7 točk]

   Rešitev

   Letna obrestna mera je $p_{\%} = 4\,\%$, mesečni konformni obrestni faktor je $r = \sqrt[12]{1{,}04}$.
   Mesečna anuiteta lahko znaša največ $a = 300$ EUR. Iščemo glavnico kredita G.
   Denarne tokove po mesecih prikazuje spodnja shema.



   Redukcijski termin postavimo na trenutek zadnje anuitete.
   Z načelom ekvivalence glavnic dobimo

$$
\begin{aligned}
Gr^{24} &= ar^{23} + ar^{22} + \cdots + ar + a,\\
Gr^{24} &= a(r^{23} + r^{22} + \cdots + r + 1),\\
Gr^{24} &= a \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1}.
\end{aligned}
$$

   Najvišja dovoljena glavnica je $G = a \cdot \dfrac{r^{24} - 1}{(r-1)r^{24}} = 300 \cdot \dfrac{1{,}04^2 - 1}{(\sqrt[12]{1{,}04} - 1)1{,}04^2} = 6913{,}54$ EUR.

   Točkovanje

   Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 2 točki.
   Mesečni obrestovalni faktor 1 točka.
   Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 1 točka.
   Vsota geometrijske vrste 1 točka.*
   Razrešitev enačbe za G in rezultat 1+1 točka.*
   Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

   b) S potrošniškim kreditom želimo kupiti novo opremo dnevne sobe, ki stane 4200 EUR. Kolikšna mora biti odplačilna doba kredita, če želimo dolg povrniti z najvišjimi še dovoljenimi anuitetami? [7 točk]

Rešitev

Glavnica kredita je $G = 4200$ EUR, mesečna anuiteta največ $a = 300$ EUR.
Naj bo število obrokov (meseci odplačilne dobe) enako n. Rešujemo enačbo

$$Gr^n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Preuredimo

$$\begin{aligned}
\frac{G(r-1)}{a} &= \frac{r^n - 1}{r^n}, \\
\frac{G(r-1)}{a} &= 1 - \frac{1}{r^n}, \\
\frac{1}{r^n} &= \frac{a - G(r-1)}{a}, \\
r^n &= \frac{a}{a - G(r-1)}
\end{aligned}$$

in logaritmiramo

$$\begin{aligned}
n \ln r &= \ln \frac{a}{a - G(r-1)}, \\
n &= \frac{\ln \frac{a}{a-G(r-1)}}{\ln r} = \frac{\ln \frac{300}{300-4200(\sqrt[12]{1{,}04}-1)}}{\ln \sqrt[12]{1{,}04}} = 14{,}35.
\end{aligned}$$

Odplačilna doba mora biti 15 mesecev.

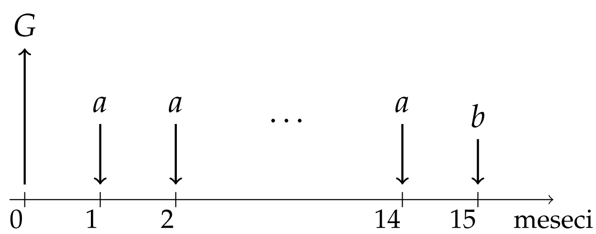
Točkovanje

Izhodiščna enačba, ki povezuje G, r, a, n (sešteta geometrijska vrsta), 1+1 točka.
Reševanje enačbe za n (lahko s poskušanjem) 2+2 točki.*
Odgovor 1 točka.
Zadnje točke ne damo, če tekmovalec zapiše samo 14,35 mesecev.
Če tekmovalec enačbe ne reši, vendar nakaže, da je potrebno logaritmiranje, 1 točka.*

c) Banka nam odobri kredit za novo opremo iz b) in dovoli, da vse anuitete razen zadnje znašajo 300 EUR. Koliko znaša zadnji obrok? [6 točk]

Rešitev

Glavnica kredita je $G = 4200$ EUR, število obrokov 15, prvih 14 je enakih $a = 300$ EUR, zadnji je b.
Denarne tokove po mesecih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na trenutek zadnje anuitete.
Z načelom ekvivalence glavnic dobimo

$$\begin{aligned} Gr^{15} &= ar^{14} + ar^{13} + \cdots + ar + b, \\ Gr^{15} &= ar(r^{13} + r^{12} + \cdots + r + 1) + b, \\ Gr^{15} &= ar \cdot \frac{r^{14} - 1}{r - 1} + b. \end{aligned}$$

Zadnji obrok znaša

$$b = Gr^{15} - ar \cdot \frac{r^{14} - 1}{r - 1} = 4200 \sqrt[12]{1{,}04}^{15} - 300 \sqrt[12]{1{,}04} \cdot \frac{\sqrt[12]{1{,}04}^{14} - 1}{\sqrt[12]{1{,}04} - 1} = 106{,}44 \text{ EUR}.$$

Točkovanje

Shema denarnih tokov (oz. razumevanje naloge) 2 točki.
Enačba na osnovi ekvivalence glavnic 1 točka.
Vsota geometrijske vrste 1 točka.*
Razrešitev enačbe za b in rezultat 1+1 točka.*
Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja. Čas t merimo v letih.

t	1	2	3
$R(0,t)$	2,00 %	2,50 %	3,00 %

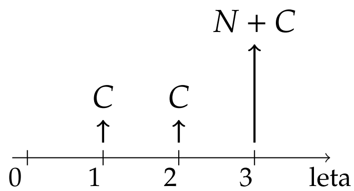
Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata dospetje čez 3 leta in izplačujeta letne kupone, prvega čez natanko eno leto.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Prva obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 4 %. Določi njeno ceno v času 0. [5 točk]

Rešitev

Posamezen kupon je enak $C = 0{,}04 \cdot 1500 = 60$ EUR.
Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P_1 = C \cdot D(0,1) + C \cdot D(0,2) + (N + C) \cdot D(0,3)$$

$$P_1 = \frac{C}{1 + R(0,1)} + \frac{C}{(1 + R(0,2))^2} + \frac{N + C}{(1 + R(0,3))^3}$$

$$P_1 = \frac{60}{1{,}02} + \frac{60}{1{,}025^2} + \frac{1560}{1{,}03^3}$$

$$P_1 = 1543{,}55 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Višina kupona 1 točka.
Shema denarnih tokov in njihove vrednosti (oz. razumevanje obveznice) 1 točka.
Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.*
Pravilno računanje diskontnih faktorjev 1 točka.
Cena obveznice 1 točka.
Samo za zapis formule za vrednotenje obveznic damo 1 točko.

b) Druga obveznica je amortizacijska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 3 %. Ta obveznica ob vsakem kuponu izplača še tretjino svoje nominalne vrednosti. Določi denarne tokove amortizacijske obveznice. Za vsak denarni tok zapiši izplačani znesek in trenutek izplačila.

Upoštevaj, da je kupon izplačan ob koncu obrestovalnega obdobja in da je njegova višina odvisna od preostale nominalne vrednosti po izplačilu prejšnjega kupona. [4 točke]

Rešitev

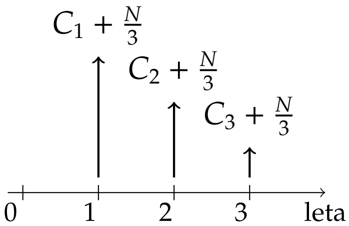
Nominalna vrednost obveznice je 1500 EUR.
Prvi kupon se izplača iz celotne nominalne vrednosti in znaša $C_1 = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ EUR.
Skupaj z njim se izplača prva tretjina nominalne vrednosti obveznice $\frac{N}{3} = 500$ EUR.
Drugi kupon se izplača iz preostale nominalne vrednosti in znaša

$$C_2 = 0{,}03 \cdot \frac{2N}{3} = 0{,}03 \cdot 1000 = 30 \text{ EUR}.$$

Skupaj z njim se izplača druga tretjina nominalne vrednosti obveznice $\frac{N}{3} = 500$ EUR.
Zadnji kupon znaša

$$C_3 = 0{,}03 \cdot \frac{N}{3} = 0{,}03 \cdot 500 = 15 \text{ EUR}.$$

Skupaj z njim se izplača zadnja tretjina nominalne vrednosti $\frac{N}{3} = 500$ EUR.



Točkovanje

Pravilno izračunana vsaj dva kupona (lahko razvidno iz denarnih tokov) 1 točka.
Denarni tokovi čez 1, 2, 3 leta 1+1+1 točka.
Če je poleg treh pravilnih denarnih tokov naveden še kakšen nepravilen, damo 3 točke.
Dopuščamo tudi denarni tok v času 0, ki predstavlja plačilo cene obveznice.

c) Določi ceno amortizacijske obveznice v času 0. [2 točki]

Rešitev

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$P_2 = \frac{C_1 + \frac{N}{3}}{1 + R(0,1)} + \frac{C_2 + \frac{N}{3}}{(1 + R(0,2))^2} + \frac{C_3 + \frac{N}{3}}{(1 + R(0,3))^3}$$

$$P_2 = \frac{545}{1{,}02} + \frac{530}{1{,}025^2} + \frac{515}{1{,}03^3}$$

$$P_2 = 1510{,}07 \text{ EUR}$$

Točkovanje

Formula za vrednotenje obveznic, usklajena z besedilom naloge, 1 točka.*
Cena obveznice 1 točka.

d) Kolikšen bi moral biti letni kupon klasične kuponske obveznice iz naloge a), da bi bila njena cena v času 0 enaka ceni amortizacijske obveznice iz naloge c)? [3 točke]

Rešitev

Označimo neznani kupon s C.
Iz formule za vrednotenje obveznic iz naloge a) dobimo enačbo

$$\frac{C}{1{,}02} + \frac{C}{1{,}025^2} + \frac{1500 + C}{1{,}03^3} = 1510{,}07,$$
$$C\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}\right) = 1510{,}07 - \frac{1500}{1{,}03^3}.$$

Dobimo

$$C = \frac{1510{,}07 - \frac{1500}{1{,}03^3}}{\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}} = 48{,}24 \text{ EUR}.$$

Točkovanje

Enačba za vrednotenje obveznice, iz katere je mogoče izraziti neznani kupon C, 1 točka.
Izrazitev C in rezultat 1+1 točka.*

e) Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera amortizacijske obveznice iz naloge b), da bi bila njena cena enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a)? [6 točk]

Rešitev

Označimo iskano nominalno obrestno mero s c.
Upoštevamo, da so kuponi amortizacijske obveznice enaki

$$C_1 = c \cdot N = 1500c, \qquad C_2 = c \cdot \frac{2N}{3} = 1000c, \qquad C_3 = c \cdot \frac{N}{3} = 500c.$$

Iz formule za vrednotenje obveznic iz naloge c) dobimo enačbo

$$\frac{500 + 1500c}{1{,}02} + \frac{500 + 1000c}{1{,}025^2} + \frac{500 + 500c}{1{,}03^3} = 1543{,}55,$$
$$c\left(\frac{1500}{1{,}02} + \frac{1000}{1{,}025^2} + \frac{500}{1{,}03^3}\right) = 1543{,}55 - 500\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}\right).$$

Dobimo

$$c = \frac{1543{,}55 - 500\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}\right)}{\frac{1500}{1{,}02} + \frac{1000}{1{,}025^2} + \frac{500}{1{,}03^3}} = 0{,}0416 = 4{,}16\,\%.$$

Točkovanje

Odvisnost višine kuponov od neznane nominalne obrestne mere c 2 točki.
Enačba, iz katere je mogoče izraziti c, 1 točka.*
Izrazitev c in rezultat (1+1)+1 točka.*

4. Cena delnice podjetja A trenutno znaša 50 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pa je 2 % za vsa dospetja. Delnica bo čez tri mesece izplačala dividendo v višini 3 EUR.

   Na delnico sta izdani evropska in ameriška nakupna opcija z zapadlostjo čez eno leto in izvršilno ceno 47 EUR.

   a) Kaj lahko poveš o premiji evropske nakupne opcije? Zapiši interval cen, ki ne omogočajo arbitraže. [6 točk]

      Rešitev

      Cena delnice je $S_0 = 50$ EUR, obrestna mera $R = 2\,\%$. Delnica do izplačala dividendo $d = 3$ EUR ob času $t = \frac{1}{4}$. Zapadlost opcij je $T = 1$ leto, izvršilna cena pa $K = 47$ EUR.
      Za premijo evropske nakupne opcije velja

      $$\max\{S_0 - K \cdot (1+R)^{-T} - I(0,T), 0\} \leq c_0^E \leq S_0.$$

      $I(0,T)$ je sedanja vrednost dividende $I(0,T) = \dfrac{d}{(1+R)^{1/4}}$. Dobimo

      $$\max\left\{50 - \frac{47}{1{,}02} - \frac{3}{1{,}02^{\frac{1}{4}}}, 0\right\} \leq c_0^E \leq 50 \quad \Rightarrow \quad 0{,}94 \leq c_0^E \leq 50.$$

      Točkovanje

      Prepis prave neenakosti za opcijsko premijo 1 točka.
      Pomen $I(0,T)$ (zadošča navedba, da je sedanja vrednost dividende) 1 točka.
      Pravilna spodnja meja 3 točke.
      Pravilna zgornja meja 1 točka.

   b) Ali je možna arbitraža, če je premija evropske nakupne opcije 2 EUR, premija ameriške nakupne pa 1,80 EUR? Če da, opiši arbitražno strategijo. [6 točk]

      Rešitev

      Premija evropske nakupne opcije je $c_0^E = 2$ EUR in ne krši intervala iz a).
      Premija ameriške nakupne opcije $c_0^A = 1{,}80$ EUR dopušča arbitražo.
      Ker ameriške opcije omogočajo predčasno izvršitev (dajejo več pravic kot evropske), ne morejo biti cenejše od sorodnih evropskih opcij.

      Arbitražna strategija je naslednja:

      Ob času $t = 0$:

      - Kupi ameriško nakupno opcijo,
      - izdaj evropsko nakupno opcijo.

      Neto denarni tok je $-1{,}80 + 2 = 0,20$ EUR.

      Ameriške opcije predčasno ne izvršimo.

      Ob času $t = 1$:

      - Izvrši ameriško nakupno opcijo, če se splača,
      - izplačaj evropsko nakupno opcijo, če je to potrebno.

V obeh primerih se denarna tokova izničita. Neto denarni tok je enak 0.

Netvegani zaslužek smo ustvarili v času 0.

Možne so še druge arbitražne strategije, npr. nakup ameriške nakupne opcije in takojšnja izvršitev.

Točkovanje

Ugotovitev, da je možna arbitraža, 1 točka.

Implementacija arbitraže:

- *Dejanja in neto denarni tok v času $t = 0$ skupaj 2* točki.*
- *Dejanja in neto denarni tok v času $t = 1$ skupaj 3* točke.*

c) Takoj po izplačilu dividend obrestne mere vztrajajo pri 2 % za vsa dospetja, cena delnice se je ustalila pri 48 EUR, cena evropske nakupne opcije pa pri 1,50 EUR. Pokaži, da je s tem možna arbitraža, in pripravi arbitražno strategijo, ki vključuje natanko eno evropsko nakupno opcijo. [8 točk]

Rešitev

Cena delnice je $S_{1/4} = 48$ EUR, obrestna mera $R = 2\,\%$, delnica do zapadlosti opcije ne bo izplačala dividend.

Za premijo evropske nakupne opcije mora veljati ocena

$$\max\{S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)}, 0\} \le c^E_{1/4} \le S_{1/4}.$$

Dobimo

$$\max\left\{48 - \frac{47}{1{,}02^{3/4}}, 0\right\} \le c^E_{1/4} \le 48 \quad \Rightarrow \quad 1{,}69 \le c^E_{1/4} \le 48.$$

Premija $c^E_{1/4} = 1{,}50$ EUR leži zunaj intervala dopustnih cen, zato je mogoča arbitraža.

Na trgu namesto predpisane neenakosti $\max\{S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)}, 0\} \le c^E_{1/4}$ velja

$$S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)} > c^E_{1/4},$$
$$S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)} - c^E_{1/4} > 0.$$

Arbitražna strategija je naslednja:

Ob času $t = 1/4$:

- Prodaj delnico (kratka prodaja),
- investiraj znesek $\dfrac{47}{1{,}02^{3/4}} = 46{,}31$ EUR do časa 1,
- kupi evropsko nakupno opcijo po ceni, ki velja na trgu.

Neto denarni tok je $48 - \dfrac{47}{1{,}02^{3/4}} - 1{,}50 = 0{,}19$ EUR.

Ob času $t = 1$:

- Kupi delnico in zapri kratko prodajo,
- prejmi investirani znesek z obrestmi,
- izvrši evropsko nakupno opcijo, če se splača.

Neto denarni tok je $-S_1 + 47 + \max\{S_1 - 47, 0\} = \max\{0, 47 - S_1\} \geq 0$.

Netvegan zaslužek je zagotovljen v času $1/4$.
Ob zapadlosti opcije lahko prejmemo še dodatno izplačilo, odvisno od cene delnice S_1.

Točkovanje

Nov interval dopustnih cen 2 točki (zadošča spodnja meja).
Ugotovitev, da je možna arbitraža, 1 točka.
Implementacija arbitraže:

- *Dejanja in neto denarni tok v času* $t = 1/4$ *skupaj 3* točke.*
- *Dejanja in neto denarni tok v času* $t = 1$ *skupaj 2* točki.*