Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol
Področno tekmovanje, 31. marec 2010

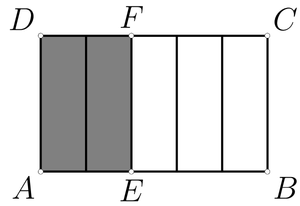
Prilepi nalepko s šifro

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

B1	B2	B3	B4

A1. Kateremu decimalnemu številu je enako razmerje ploščin pravokotnikov $AEFD$ in $ABCD$ (glej sliko)?



(**A**) 0,2 (**B**) 0,3 (**C**) 0,4 (**D**) 0,5 (**E**) 0,6

A2. Katero izmed navedenih števil je enajst milijonov enajst tisoč enajst?

(**A**) 11001111 (**B**) 11011011 (**C**) 11011111 (**D**) 11111111 (**E**) 101101011

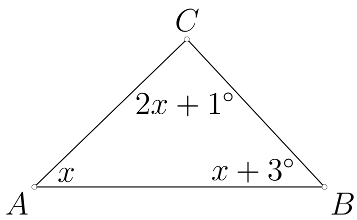
A3. Manca je zapisala vsa trimestna števila, v katerih so nastopale števke 1, 4 in 7, vsaka enkrat. Koliko izmed teh števil je bilo deljivih z 2?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

A4. V tovarni so $6{,}5$ t sladkorja zapakirali v vrečke po 2 kg. Koliko vrečk so napolnili?

(**A**) 3000 (**B**) 3200 (**C**) 3250 (**D**) 3500 (**E**) 3600

A5. Koliko je velik največji notranji kot trikotnika ABC (glej sliko)?



(**A**) $44°$ (**B**) $89°$ (**C**) $90°$ (**D**) $176°$

(**E**) Nemogoče je določiti.

A6. Na zemljevidu je razdalja med dvema krajema enaka 8 cm. V kakšnem merilu je narisan zemljevid, če je razdalja med tema krajema enaka 4 km?

(**A**) $1:2$ (**B**) $1:5$ (**C**) $1:4000$ (**D**) $1:5000$ (**E**) $1:50000$

A7. Za naravno število n je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, npr. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ in $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Katero število je enako vrednosti ulomka $\frac{8!}{6!}$?

(**A**) $\frac{4}{3}$ (**B**) 4 (**C**) 8 (**D**) 28 (**E**) 56

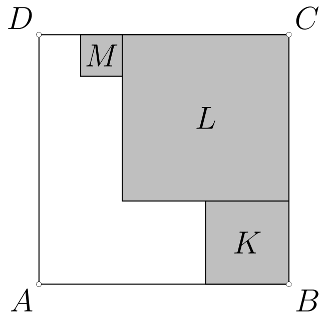
A8. Gašper je na list papirja narisal kvadrat, krog in enakostranični trikotnik. Obseg vsakega izmed teh likov je $7{,}2$ cm. V katerem primeru so ti liki razvrščeni od lika z najmanjšo ploščino do lika z največjo ploščino?

(**A**) trikotnik, kvadrat, krog (**B**) krog, kvadrat, trikotnik

(**C**) trikotnik, krog, kvadrat (**D**) krog, trikotnik, kvadrat

(**E**) kvadrat, trikotnik, krog

A9. V kvadratu $ABCD$ so narisani kvadrati K, L in M (glej sliko). Ploščina kvadrata K je 4 cm^2, ploščina kvadrata L je 16 cm^2 in ploščina kvadrata M je 1 cm^2. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina kvadrata $ABCD$?



(**A**) 30 (**B**) 36 (**C**) 55 (**D**) 64

(**E**) Nemogoče je določiti.

A10. Na koliko načinov lahko blagajnik izplača 30 EUR, če ima na voljo le bankovce za 5 EUR, 10 EUR in 20 EUR?

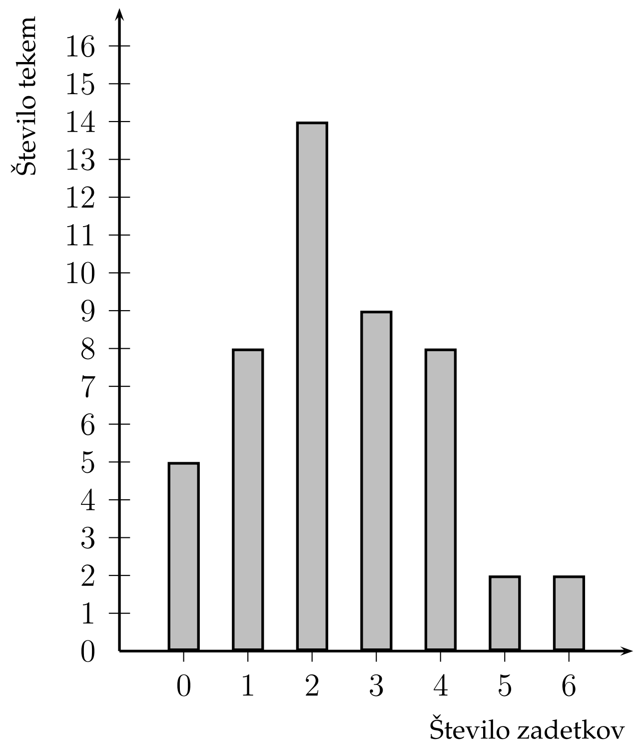
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

B1. Prikaz s stolpci ponazarja število zadetkov na tekmah predtekmovanja na zadnjem svetovnem prvenstvu.

A Koliko tekem je bilo odigranih?

B Koliko zadetkov je bilo v povprečju doseženih na tekmo? Rezultat zapiši na dve decimalni mesti natančno.

C Kolikšen je odstotek tekem, na katerih so moštva dosegla manj zadetkov od povprečja?



B2. Za označevanje trgovskega blaga je danes najpogosteje v rabi črtna koda EAN13. Črtna koda je sestavljena iz slikovnega dela in 13 števk, po vrsti označenih z $a_1, \ldots, a_{13}$. Za te števke mora veljati, da je vrednost izraza

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \ldots + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}$$

deljiva z 10.

A Z računom preverite, da je koda EAN13 na desni sliki veljavna.

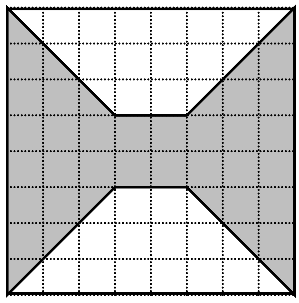
0 123456 789777 >

B Določite taki števki a_8 in a_{13}, da bo koda EAN13 na desni sliki veljavna. Zapišite vsaj tri rešitve.

1 345870 6215 >

a_8 a_{13}

B3. Šivilja je imela blago v obliki kvadrata z 8 cm dolgo stranico. Iz njega je izrezala dva enakokraka trapeza in dobila pentljo (glej sliko, pentljo predstavlja osenčeni lik). Dolžini osnovnic izrezanih trapezov sta 8 cm in 2 cm, višini pa 3 cm.



A Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina enega izrezanega trapeza?

B Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina pentlje?

C Kolikšen del ploščine kvadrata predstavlja ploščina pentlje? Rezultat izrazite z decimalnim številom na 2 decimalni mesti natančno.

B4. V vsakem kubičnem metru vode, ki teče v Hladno jamo, je raztopljenega 75 g apnenca.

A Koliko gramov apnenca je v 350 ℓ vode, ki priteče v Hladno jamo? Rezultat zapišite na dve decimalni mesti natančno.

B V zbiralniku, polnem vode iz Hladne jame, je raztopljeno 35 g apnenca. Kolikšna je prostornina zbiralnika? Rezultat zapišite na liter natančno.

C Hladno jamo krasi mogočen, 1000-kilogramski kapnik, v celoti sestavljen iz apnenca. Najmanj koliko kubičnih metrov vode je priteklo v Hladno jamo, da se je iz vode lahko izločilo toliko apnenca?

10. tekmovanje v znanju matematike
za dijake poklicnih šol
Področno tekmovanje, 31. marec 2010

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 *točkama, nepravilen z* -0.5 *točke, če naloga ni rešena,* 0 *točk.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	C	B	E	E	A	B	D

1. Razmerje ploščin p_{AEFD} in p_{ABCD} je enako $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

2. Število enajst milijonov enajst tisoč enajst zapišemo kot 11011011.

3. Število je deljivo z dve, če je njegova zadnja števka soda. Iz števk 1, 4 in 7 lahko sestavimo 2 števili, deljivi z 2: 174 in 714.

4. Napolnili so $6{,}5 \cdot 10^3$ kg : 2 kg $= 3{,}25 \cdot 10^3 = 3250$ vrečk sladkorja.

5. Ker je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka $180°$, lahko zapišemo enačbo $x + (x + 3°) + (2x + 1°) = 180°$. Rešitev enačbe je $x = 44°$. Največji kot je $2x + 1° = 89°$.

6. Razmerje 8 cm : 4 km $= 8$ cm : 400000 cm $= 1 : 50000$.

7. Če upoštevamo, da je $8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ in $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$, je $\frac{8!}{6!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 8\cdot7 = 56$.

8. Iz podatka za obseg $o = 7{,}2$ cm izračunamo stranico enakostraničnega trikotnika $a_{tr} = \frac{7{,}2 \text{ cm}}{4} = 1,8$ cm, stranico kvadrata $a_{kv} = \frac{7{,}2 \text{ cm}}{4} = 1,8$ cm in polmer kroga $r_{kr} = \frac{7{,}2 \text{ cm}}{2\pi} = 1,15$ cm. Ploščina enakostraničnega trikotnika je $S_{tr} = \frac{a_{tr}^2\sqrt{3}}{4} = 2,49$ cm^2, ploščina kvadrata je $S_{kv} = a_{kv}^2 = 3,24$ cm^2 in ploščina kroga $S_{kr} = \pi r^2 = 4,15$ cm^2. Razvrstitev ploščin od najmanjše do največje je: trikotnik, kvadrat, krog.

9. Blagajnik lahko izplača 30 EUR z bankovci za 5 EUR, 10 EUR in 20 EUR na šest načinov:
   - 1 bankovec za 20 EUR in 1 bankovec za 10 EUR,
   - 1 bankovec za 20 EUR in 2 bankovca za 5 EUR,
   - 3 bankovci za 10 EUR,
   - 2 bankovca za 10 EUR in 2 bankovca za 5 EUR,
   - 1 bankovec za 10 EUR in 4 bankovci za 5 EUR,

- 6 bankovcev po 5 EUR.

10. Stranica kvadrata K meri $\sqrt{4\text{ cm}^2} = 2$ cm, stranica kvadrata L pa $\sqrt{16\text{ cm}^2} = 4$ cm. Stranica kvadrata $ABCD$ je vsota stranic kvadratov K in L; torej 6 cm. Ploščina kvadrata D je $(6\text{ cm})^2 = 36\text{ cm}^2$.

B1. Iz prikaza s stolpci razberemo. Odigranih je bilo $5+8+14+9+8+2+2=48$ tekem. V povprečju je bilo doseženih $\frac{5\cdot0+8\cdot1+14\cdot2+9\cdot3+8\cdot4+2\cdot5+2\cdot6}{48}=2,4375$ zadetkov na tekmo. Na 27 tekmah so moštva dosegla manj zadetkov od povprečja, kar predstavlja $\frac{27}{48}=56,25\ \%$.

A Odgovor, npr.: Odigranih je bilo 48 tekem. .... **1 t**

B Izračunano povprečno število zadetkov na tekmo:
$\frac{5\cdot0+8\cdot1+14\cdot2+9\cdot3+8\cdot4+2\cdot5+2\cdot6}{48}=2,4375\approx2,44$ .... **1 t**
Odgovor, npr.: V povprečju je bilo doseženih 2,44 zadetkov na tekmo. .... **1 t**

C Izračunan procent $\frac{27}{48}=0,5625=56,25\ \%$ .... **1 t**
Odgovor, npr.: Moštva so dosegla manj zadetkov od povprečja na 56,25 $\%$ tekem. . **1 t**

B2. Koda pod (A) je veljavna, saj je

$$0+3\cdot1+2+3\cdot3+4+3\cdot5+6+3\cdot7+8+3\cdot9+7+3\cdot7+7=130,$$

število 130 pa je deljivo z 10. Pri vprašanju (B) je rešitev več. Da je koda veljavna, mora biti vsota

$$1+3\cdot3+4+3\cdot5+8+3\cdot7+0+3\cdot a_8+6+3\cdot2+1+3\cdot5+a_{13}=86+3a_8+a_{13}$$

deljiva z 10. Za (a_8,a_{13}) dobimo naslednje možne rešitve: $(0,4)$, $(1,1)$, $(2,8)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(5,9)$, $(6,6)$, $(7,3)$, $(8,0)$, $(9,7)$.

A Ugotovitev: Koda je veljavna. .... **1 t**
Utemeljitev z računom. .... **1 t**

B Zapisane vsaj tri od možnih rešitev za a_8 in a_{13}, tako da je vsota $1+3\cdot3+4+3\cdot5+8+3\cdot7+0+3\cdot a_8+6+3\cdot2+1+3\cdot5+a_{13}=86+3a_8+a_{13}$ deljiva z 10. Za vsako od zapisanih rešitev dobi tekmovalec 1 točko. .... **3 krat 1 t**
Op.: Čeprav tekmovalec zapiše več rešitev, lahko dobi največ 3 točke.

B3. Ploščino izrezanega trapeza izračunamo po formuli $S=\frac{(a+c)v}{2}$, pri čemer je $a=8$ cm, $c=2$ cm in $v=3$ cm. Ploščina je $S=15\text{ cm}^2$. Ploščino pentlje predstavlja preostanek ploščine kvadrata s stranico 8 cm, potem ko je šivilja izrezala dva enakokraka trapeza: $S_{pentlje}=S_{kvadrata}-2\cdot S_{trapeza}=64\text{ cm}^2-2\cdot15\text{ cm}^2=34\text{ cm}^2$. Ploščina pentlje predstavlja $\frac{34\text{ cm}^2}{64\text{ cm}^2}=0,5313\approx0,53$ del oz. 53% ploščine kvadrata.

A Zapisan odg., npr.: Ploščina izrezanega trapeza je 15 cm^2. .... **1 t**

B Izračun ploščine pentlje po formuli ali s preštevanjem kvadratkov: $S=34\text{ cm}^2$ ..... **1 t**
Zapisan odgovor, npr.: Pentlja ima ploščino 34 cm^2 .... **1 t**

C Izračunan in pravilno zaokrožen del ploščine pentlje glede na ploščino kvadrata: $0{,}53$ ali 53%. .... **2 t**
Op.: Neustrezno ali napačno zaokrožen odgovor prinese tekmovalcu le 1 točko.

B4. Pri izračunih si pomagamo s sklepnim računom. V 350 litrih vode je $\frac{350\ \ell \cdot 75\ \mathrm{g}}{1000\ \ell} = 26,25$ g apnenca. Apnenec z maso 35 g je v $\frac{35\ \mathrm{g} \cdot 1000\ \ell}{75\ \mathrm{g}} = 466{,}67\ \ell \approx 467\ \ell$ vode. Da je nastal 1000 kilogramski kapnik, je priteklo vsaj $\frac{1000000\ \mathrm{g} \cdot 1000\ \ell}{75\ \mathrm{g}} = 13333333{,}33\ \ell \approx 13333\ \mathrm{m}^3$ vode.

A Izračunana masa apnenca: $26{,}25$ g. .... **1 t**

B Izračunana prostornina vode, ki vsebuje 35 g apnenca: $467\ \ell$. .... **2 t**
Op.: Neustrezno ali napačno zaokrožen odgovor prinese tekmovalcu le 1 točko.

C Izračunana prostornina vode, iz katere se je izločilo 1000 kg apnenca: $13333\ \mathrm{m}^3$ .... **1 t**
Zapisan odgovor, npr.: Priteklo je vsaj $13333\ \mathrm{m}^3$ vode. .... **1 t**