Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

7. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

V nalogah od A1 do A6 izberite črko pred pravilnim odgovorom in jo vpišite v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli. Če pustite polje v preglednici prazno, dobite 0 točk.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

Naloge od B1 do B4 rešujte na priloženem papirju, kamor vpisujte celotne račune. Vsako nalogo skrbno preberite in odgovorite na zastavljena vprašanja. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 7 točkami.

Upoštevajte, da je treba v času **90 minut** rešiti naloge prvega in drugega dela.

A1. Darko, Andrej in Renata stanujejo v bloku. Blok ima štiri nadstropja in pritličje. Kdo živi v četrtem nadstropju, če:
- Darko stanuje neposredno nad Andrejem,
- Renata ne živi v pritličju,
- se mora Andrej spustiti za dve nadstropji, če želi obiskati Renato.

(**A**) Darko (**B**) Andrej (**C**) Darko in Andrej
(**D**) Renata (**E**) nihče

A2. Če trgovec proda izdelek po 180 evrov, ima 10 % izgube. Po koliko evrov mora prodati izdelek, da bi imel 5 % dobička?

(**A**) 190 (**B**) 200 (**C**) 207 (**D**) 207,9 (**E**) 210

A3. Ravna drogova stojita navpično na vodoravni podlagi, oddaljena 20 m eden od drugega. Razdalja med njunima vrhoma je 25 m. Koliko metrov je en drog višji od drugega?

(**A**) 5 (**B**) 12 (**C**) 13 (**D**) 15 (**E**) 32

A4. Skupna ocena mojstrskega izpita je sestavljena iz $\frac{2}{5}$ ocene teoretičnega in $\frac{3}{5}$ ocene praktičnega dela. Ocene so od 1 do 10. Mojster Jaka je pomotoma zamenjal oceni za teoretični in praktični del. Kandidat je zato dobil za 1 višjo oceno, kot si jo je zaslužil. Kolikšni sta lahko kandidatovi pravi oceni za teorijo in prakso?

(**A**) teorija 6, praksa 7 (**B**) teorija 7, praksa 6
(**C**) teorija 4, praksa 9 (**D**) teorija 9, praksa 4
(**E**) teorija 5, praksa 10

A5. Mija in Maja sta morali za domačo nalogo izrezati enakostranični trikotnik iz papirja. Stranica Mijinega trikotnika je dolga 5 cm, stranica Majinega pa 10 cm. Kolikokrat je ploščina Majinega trikotnika večja od ploščine Mijinega trikotnika?

(**A**) 2-krat (**B**) $\sqrt{3}$-krat (**C**) 3-krat
(**D**) 4-krat (**E**) 5-krat

A6. Vemo, da je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$ in $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$. Koliko je $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}$?

(**A**) $\frac{1023}{1024}$ (**B**) $\frac{127}{128}$ (**C**) $\frac{255}{256}$ (**D**) $\frac{511}{512}$ (**E**) $\frac{1}{256}$

B1. Bankir je želel odpreti enega od trezorjev, a je pozabil šifro. Vedel je, da sta na prvih dveh mestih šifre črki B in Ž, ni pa vedel, katera je prej. Vedel je tudi, da se šifra nadaljuje s štirimestnim številom, v katerem nastopa vsaka izmed števk 2, 5, 7 in 9.

A Koliko je vseh možnosti za oblikovanje te šifre?

B Koliko % možnosti ima bankir, da že v prvem poskusu odtipka pravo šifro?

C Bankir se je kasneje spomnil, da
- se šifra začne z zadnjo črko abecede,
- je štirimestno število v šifri deljivo s 5,
- je število stotic tega števila manjše od števila tisočic,
- je število desetic enako vsoti števk na mestih stotic in tisočic.

Zapišite šifro.

B2. Peter se odloča za nakup novega avtomobila. Nekaj podatkov o modelu z bencinskim in modelu z dizelskim motorjem je zbral v tabelo.

	cena avtomobila	stroški goriva	poraba
bencinski motor	13300 EUR	0,940 EUR/liter	7,4 litra/100 km
dizelski motor	14970 EUR	0,892 EUR/liter	5,2 litra/100 km

A Za koliko % je cena modela z dizelskim motorjem višja od tistega z bencinskim? Rezultat zaokrožite na eno decimalko natančno.

B Koliko goriva bi porabil avtomobil z bencinskim in koliko avtomobil z dizelskim motorjem, če bi prevozil 15000 km?

C Čez koliko mesecev bi prihranek zaradi stroškov goriva pokril razliko v ceni med dražjim in cenejšim modelom, če bi letno prevozil 15000 km?

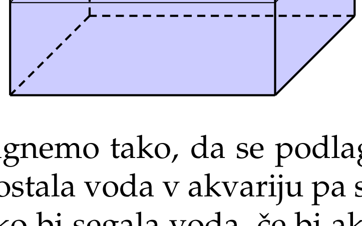
B3. Temperaturo merimo v stopinjah Celzija (°C), ponekod pa uporabljajo stopinje Fahrenheita (°F). Oba načina povezuje enačba $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$, pri čemer T_F pomeni temperaturo, izraženo v stopinjah Fahrenheita, T_C pa temperaturo, izraženo v stopinjah Celzija.

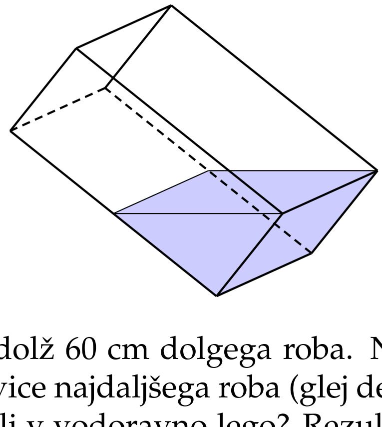
A Koliko °F je 10 °C?

B Koliko °C je 14 °F?

C Narišite graf temperature Fahrenheita v odvisnosti od temperature Celzija.

B4. V akvariju v obliki kvadra dolžine 1 m, širine 60 cm in višine 40 cm je voda (glej levo sliko).





Akvarij nagnemo tako, da se podlage dotika vzdolž 60 cm dolgega roba. Nekaj vode izteče, preostala voda v akvariju pa sega do polovice najdaljšega roba (glej desno sliko). Kako visoko bi segala voda, če bi akvarij postavili v vodoravno lego? Rezultat izrazite v centimetrih.

7. tekmovanje v znanju matematike
za dijake poklicnih šol

Državno tekmovanje, 21. april 2007

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

I. DEL

V preglednici so zapisani pravilni odgovori. Pravilni odgovor tekmovalca se točkuje z 2 točkama, nepravilni z -1 točko, prazno polje preglednice pa z 0 točkami.

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	E	D	D	D	C

1. Ker Renata ne živi v pritličju, lahko živi v ostalih štirih nadstropjih. Andrej živi 2 nadstropji višje kot Renata, torej v 3. ali 4. nadstropju. Ker je nad Andrejem še Darko, živi Andrej lahko le v 3., Darko pa v 4. nadstropju.

2. Redna cena je $\frac{180 \cdot 100}{90}$ in znaša 200 evrov. Če želi trgovec prodati izdelek s 5 $\%$ dobičkom, ga mora prodati za 210 evrov.

3. Po Pitagorovem izreku je $x^2 = (25\ m)^2 - (20\ m)^2$. Daljši drog je višji za $x = 15\ m$.

4. Kandidat je dobil pri teoriji oceno 9, pri praksi pa 4, saj je $\frac{2}{5} \cdot 9 + \frac{3}{5} \cdot 4 = 6$ in $\frac{2}{5} \cdot 4 + \frac{3}{5} \cdot 9 = 7$. V ostalih primerih to ne velja.

5. Izračunamo ploščini obeh enakostraničnih trikotnikov. Če je $a_1 = 5\ cm$, je $S_1 = \frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^2$. Če je $a_2 = 10\ cm$, je $S_2 = \frac{100\sqrt{3}}{4}\ cm^2$. Ploščina S_2 je 4-krat večja od ploščine S_1.

6. V iskani vsoti je števec za ena manjši od imenovalca. Imenovalec ima vrednost največje potence med imenovalci seštevancev na levi strani izraza.

II. DEL

B1. **A** Možnih kombinacij je $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$. Lahko jih tudi zapišemo in preštejemo.

B Bankir ima $\frac{1}{48} \approx 0,02 = 2\ \%$ možnosti, da že v prvem poskusu najde pravo šifro.

C Šifra se začne s črko Ž, sledi ji črka B. Štirimestno število, ki sledi črkam, se končuje s 5. Števke 2,7 in 9, ki ostanejo na razpolago, razporedimo po naslednjem ključu: 9 na mestu desetic je vsota števk 2 in 7 na mestu stotic in tisočic. Upoštevamo, da je število stotic manjše od števila tisočic in dobimo šifro ŽB7295.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 7 točk}}$

A Za kombinaciji s črkami: 2 možnosti .... **1 t**
Za kombinacije s številkami: 24 možnosti .... **1 t**
Vseh možnih kombinacij je 48. .... **1 t**

B Izračun: $\frac{1}{48} = 0,02 = 2\ \%$ .... **1 t**
Odgovor: Bankir ima 2 % možnosti, da v prvem poskusu najde pravo šifro. .... **1 t**

C Šifra je ŽB7295. .... **2 t**

B2. **A** Cena modela z dizelskim motorjem je za $\frac{14970-13300}{13300} \cdot 100 = 12,6\ \%$ višja od cene modela z bencinskim motorjem.

B Avtomobil z bencinskim motorjem bi porabil v enem letu $15000\ km \cdot \frac{7,4\ l}{100\ km} = 1110\ l$, model z dizelskim motorjem pa $15000\ km \cdot \frac{5,2\ l}{100\ km} = 780\ l$.

C Če Peter kupi avtomobil z dizelskim motorjem, porabi za gorivo letno $1110\ l \cdot \frac{0,940}{l} - 780\ l \cdot \frac{0,892}{l} = 347,64$ evrov manj. Petru bi se večji stroški ob nakupu avtomobila z dizelskim motorjem povrnili v $\frac{14970-13300}{347,64} = 4,804$ leta oz. 58 mesecih.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 7 točk}}$

A Cena je višja za 12,6 %. .... **2 t**

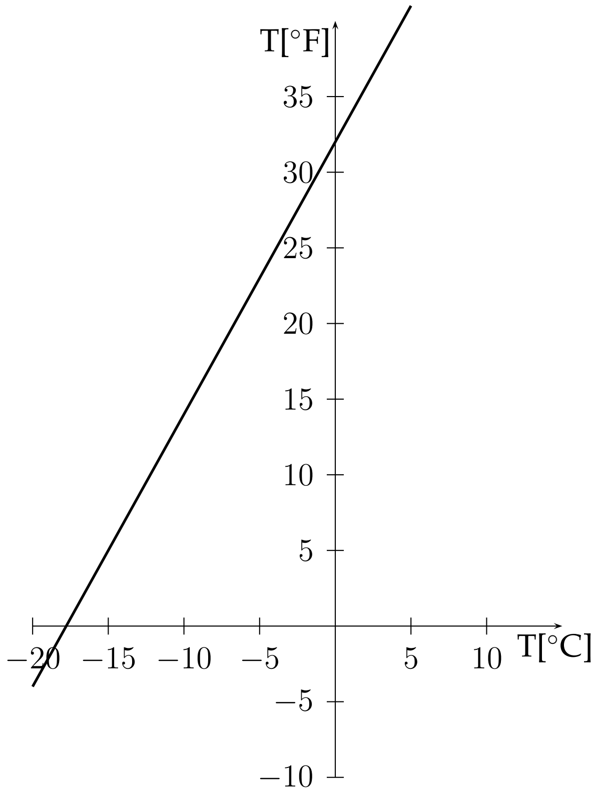
B Izračunana letna poraba bencinskega motorja: 1110 l. .... **1 t**
Izračunana letna poraba dizelskega motorja: 780 l. .... **1 t**

C Izračun: $1110 \cdot 0,940 - 780 \cdot 0,892 = 347,64$ evra manj goriva .... **1 t**
Izračun: $\frac{14970-13300}{347,64} = \frac{1670}{347,64} = 4,804$ leta=58 mesecev. .... **1 t**
Odgovor: Petru bi se stroški povrnili v 58 mesecih. .... **1 t**

B3. **A** 10 °C je $\frac{9}{5} \cdot 10 + 32 = 50$ °F.

B Iskana temperatura T_C je rešitev enačbe $14 = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$. Temperatura $T_C = -10$ °C.

C Odvisnost temperature Fahrenheita od temperatute Celzija prikazuje graf:



Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 7 točk}}$

A Zapis enačbe: $T_F = \frac{9}{5} \cdot 10 + 32$ .... **1 t**
Izračunana temperatura v Fahrenheitih: $T_F = 50\ °F$.......... **1 t**

B Zapis enačbe: $14 = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$ .... **1 t**
Izračunana temperatura v °C: $T_C = -10\ °C$.......... **1 t**

C Pravilno označene osi .... **1 t**
Pravilno narisana premica .... **1 t**
Natančnost, npr. ordinatno os seka pri 32 in poteka skozi točko $(10, 50)$ oz. dobro označeni ustrezni točki, skozi kateri poteka premica. .... **1 t**

B4. Prostornino vode v akvariju s podatki $a = 1\ m$, $b = 60\ cm$, $c = 40\ cm$ izračunamo po formuli za prostornino tristrane prizme, ki ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik s katetama c in $\frac{a}{2}$, in višino b: $V_{vode} = \frac{c \cdot \frac{a}{2}}{2} \cdot b = \frac{40\ cm \cdot 50\ cm}{2} \cdot 60\ cm = 60000\ cm^3$. Ko je akvarij v vodoravni legi, sega voda do višine $v = \frac{V_{vode}}{ab} = \frac{60000\ cm^3}{100\ cm \cdot 60\ cm} = 10\ cm$.

Točkovnik: $\boxed{\text{Skupaj: 7 točk}}$

Ugotovitev, da je osnovna ploskev 3-strane prizme pravokotni trikotnik s katetama $40\ cm$ in $50\ cm$ .... **1 t**
Izračun prostornine 3-strane prizme: $V = 60000\ cm^3$ .... **2 t**
(Tekmovalec dobi 1 točko, če je iz računa razviden izračun velikosti osnovne ploskve $O = 1000\ cm^2$, prostornina V pa je pri tem nepravilno izračunana.)
Izračun višine kvadra: $v = 10\ cm$ .... **2 t**
Dosleden zapis enot .... **1 t**
Odgovor: Voda v akvariju sega 10 cm visoko. .... **1 t**