Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge
DMFA Slovenije

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Poenostavi izraz $\frac{1+3a^{-1}+3a^{-2}+a^{-3}}{1+a^{-3}} \cdot \frac{1-a^{-1}+a^{-2}}{1-a^{-2}}$; $a \neq -1, 0, 1$, nato pa izračunaj vrednost izraza za $a = 2,8\bar{3} : \frac{17}{30}$.

B2. V dveh sadovnjakih so prvo leto nabrali skupaj 315 ton sadja. Naslednje leto se je skupni pridelek povečal za $40\ \%$. V prvem sadovnjaku se je pridelek povečal za $25\ \%$, v drugem pa za $50\ \%$. Koliko ton sadja so v vsakem sadovnjaku nabrali prvo leto in koliko drugo leto?

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dana je družina premic z enačbo $m(2x-1)+(-x+2y-2)=0$, $m\in\mathbb{R}$.
a) Za $m=3$ zapiši enačbo premice v eksplicitni in odsekovni obliki ter jo nariši v kartezičnem koordinaten sistemu.
b) Zapiši, za katero vrednost parametra m leži točka $A(-\frac{3}{2},4)$ na dani premici.
c) Zapiši, za katero vrednost parametra m je dana premica vzporedna premici $2x+4y-1=0$.
d) Zapiši, za katere vrednosti parametra m je dana premica naraščajoča.

B2. a) Poenostavi izraz: $\frac{14\sqrt{15}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{10}}-\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

b) Izračunaj vrednost izraza: $0,36^{-\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+16^{\frac{3}{4}}+\left(0,25^{-\frac{1}{2}}-8^{-\frac{2}{3}}\right)^{0}$

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. Dan je paralelogram $ABCD$ s podatki: $|AB| = a = 8cm$, $|BC| = b = 4\sqrt{2}cm$, $v_a = 4cm$ in kot $\sphericalangle BAD$ je ostri.

a) S šestilom in ravnilom načrtajte paralelogram $ABCD$.

b) Izračunajte velikosti kotov $\sphericalangle BAD$ in $\sphericalangle ADB$.

B2. Dana je kvadratna funkcija s predpisom $f(x) = -2(x-2)^2 + 8$.

a) Narišite graf funkcije f v kartezičnem koordinatnem sistemu.

b) Izračunajte ploščino enakokrakega trapeza $ABCD$, katerega oglišči A in B sta v presečišči grafa funkcije f in abscisne osi, oglišči C in D pa ležita na grafu funkcije f tako, da je $|CD| = 2$.

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 45 minut.

B1. 1. Hkrati vržemo tri poštene igralne kocke, ki jih med seboj razlikujemo. S kolikšno verjetnostjo padejo

a) dve šestici in ena petica?

b) tri različna števila?

c) vsota pik pet?

d) vsota pik tri ali štirinajst?

e) vsaj šestnajst pik?

B2. 5. V množici realnih števil reši enačbo $\sqrt{6x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 9x + 3} = 2x^2 + 1$. Različne rešitve enačbe (večkratne rešitve upoštevaj enkrat) so prvi trije členi padajočega neskončnega geometrijskega zaporedja. Kolikšna je vsota prvih desetih členov tega zaporedja?

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Rešitve nalog za Naloge za 1. letnik

1. Potence z negativnim eksponentom zapišemo z ulomki ter jih razširimo na skupni imenovalec $\frac{1+\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}}{1+\frac{1}{a^3}} \cdot \frac{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}{1-\frac{1}{a^2}} = \frac{\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^3}}{\frac{a^3+1}{a^3}} \cdot \frac{\frac{a^2-a+1}{a^2}}{\frac{a^2-1}{a^2}}$. Odpravimo dvojne ulomke ter razstavimo, kar se da $\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^3+1} \cdot \frac{a^2-a+1}{a^2-1} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)+3a(a+1)}{(a+1)(a^2-a+1)} \cdot \frac{a^2-a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{(a+1)(a^2-a+1+3a)}{(a+1)(a^2-a+1)} \cdot \frac{a^2-a+1}{(a-1)(a+1)}$. Krajšamo $\frac{a^2+2a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{(a+1)(a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{a-1}$. Periodično decimalno število $2,8\overline{3}$ pretvorimo v ulomek $\frac{17}{6}$ in poenostavimo $a = 2,8\overline{3} : \frac{17}{30} = \frac{17}{6} \cdot \frac{30}{17} = 5$. $a = 5$ vstavimo v poenostavljen izraz $\frac{a+1}{a-1}$ ter dobimo rešitev $\frac{3}{2}$.

Zapis potenc z negativnim eksponentom z ulomki $\frac{1+\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}}{1+\frac{1}{a^3}} \cdot \frac{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}}{1-\frac{1}{a^2}}$ .... 1 točka
Razširitev ulomkov na skupni imenovalec $\frac{\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^3}}{\frac{a^3+1}{a^3}} \cdot \frac{\frac{a^2-a+1}{a^2}}{\frac{a^2-1}{a^2}}$ .... 1 točka
Odprava dvojnih ulomkov $\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^3+1} \cdot \frac{a^2-a+1}{a^2-1}$ .... 1 točka
Razstavljanje izraza $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = a^3 + 1 + 3a(a + 1) = (a + 1)(a^2 - a + 1) + 3a(a + 1)$ $= (a + 1)(a^2 - a + 1 + 3a) = (a + 1)(a^2 + 2a + 1)$ .... 2 točki
Razstavljanje izraza $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{a+1}{a-1}$ .... 1 točka
Zapis periodičnega decimalnega števila z ulomkom $2,8\overline{3} = \frac{17}{6}$ .... 1 točka
Poenostavitev števila $a = 2,8\overline{3} : \frac{17}{30} = \frac{17}{6} \cdot \frac{30}{17} = 5$ .... 1 točka
Rezultat $\frac{5+1}{5-1} = \frac{3}{2}$ .... 1 točka

2. Z x in y označimo pridelka iz prvega oziroma drugega sadovnjaka v prvem letu. Potem je skupni pridelek v prvem letu enak $x + y = 315$. V drugem letu je pridelek prvega sadovnjaka enak $x_2 = x + 25\ \%\ x = 1,25x$, drugega pa $y_2 = y + 50\ \%\ y = 1,5\ y$. Skupni pridelek je enak $1,25x + 1,5y = 1,4 \cdot 315$ oziroma $1,25x + 1,5y = 441$. Rešimo sistem enačb in dobimo $x = 126$ in $y = 189$. V prvem letu so v prvem sadovnjaku pridelali 126 ton sadja, v drugem pa 189 ton. Izračunamo še pridelka obeh sadovnjakov v drugem letu. $x_2 = 1,25x = 1,25 \cdot 126 = 189$ in $y_2 = 1,5y = 283,5$. V drugem letu so v prvem sadovnjaku pridelali 189 ton sadja, v drugem pa 283,5 ton.

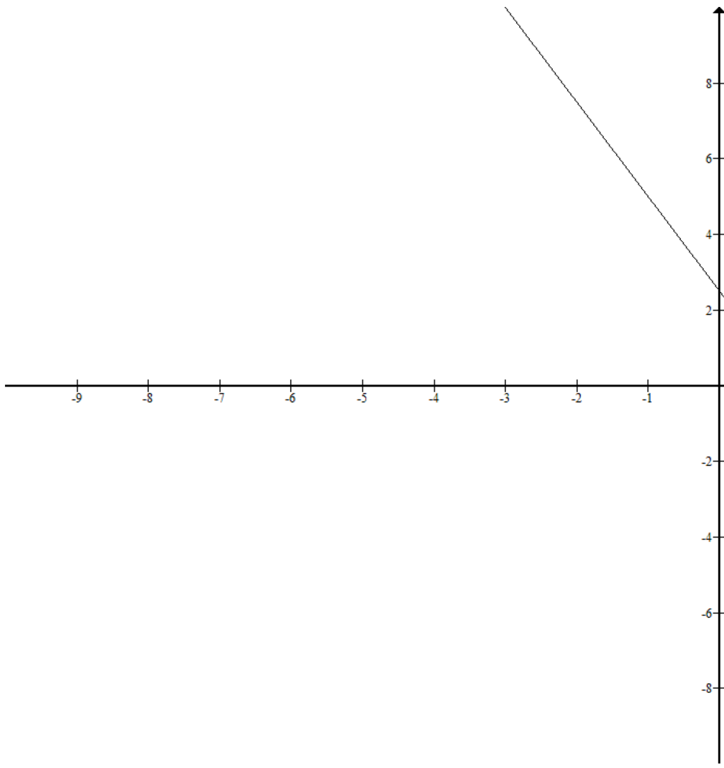
Zapis pridelka v prvem sadovnjaku za prvo leto x .... 1 točka
Zapis pridelka v drugem sadovnjaku za prvo leto y .... 1 točka
Zapis pridelka v prvem sadovnjaku za drugo leto $x_2 = x + 25\ \%\ x = 1,25\ x$ .... 1 točka
Zapis pridelka v drugem sadovnjaku za drugo leto $y_2 = y + 50\ \%\ y = 1,5\ y$ .... 1 točka
Zapis sistema enačb $x + y = 315$ $1,25\ x + 1,5\ y = 441$ .... 1+1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Izračun pridelka za prvo leto v prvem sadovnjaku 126 ton in v drugem 189 ton .... 1 točka
Izračun pridelka za drugo leto v prvem sadovnjaku 189 ton in v drugem 283,5 ton .... 1 točka
Odgovor: V prvem letu so v prvem sadovnjaku pridelali 126 ton sadja, v drugem pa 189 ton. V drugem letu so v prvem sadovnjaku pridelali 189 ton sadja, v drugem pa 283,5 ton. . 1 točka

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Rešitve nalog za Naloge za 2. letnik

1. Vstavimo $m = 3$ in dobimo premico z enačbo $5x + 2y - 5 = 0$. Preoblikujemo jo v eksplicitno obliko in dobimo $y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$. Premico zapišemo se v odsekovni obliki in dobimo: $\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$.
Premico narišemo: odsek na osi x je 1, odsek na osi y pa $\frac{5}{2}$.
Točko $A(-\frac{3}{2}, 4)$ vstavimo v dano družino premic in dobimo, da je $m = \frac{15}{8}$.
Enačbo družine premic preoblikujemo v eksplicitno obliko: $y = \frac{1-2m}{2}x + \frac{m}{2} + 1$. Izpišemo smerni koeficient $k = \frac{1-2m}{2}$.
Premici sta vzporedni, ko imata enak smerni koeficient. Ker je smerni koeficient dane premice $-\frac{1}{2}$, smerni koeficient družine premic pa $\frac{1-2m}{2}$, z enačenjem le-teh dobimo, da sta premici vzporedni, ko je $m = 1$.



Premica je naraščajoča, ko je $k > 0$, to je, ko je $m < \frac{1}{2}$.

a) Zapis premice v eksplicitni obliki $y = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$ . . . . 1 točka
Zapis premice v odsekovni obliki $\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$ . . . . 1 točka
Narisana premica . . . . 1 točka

b) Vstavljanje točke A v enačbo in izračun vrednosti parametra $m = \frac{15}{8}$ . . . . 1 točka

c) Zapis smernega koeficienta dane premice $-\frac{1}{2}$ . . . . 1 točka
Zapis smernega koeficienta družine premic $k = \frac{1-2m}{2}$ . . . . 1 točka
Ugotovitev, da sta premici vzporedni, ko sta njuna smerna koeficienta enaka $\frac{1-2m}{2} = -\frac{1}{2}$ . . . . 1 točka
Izračun vrednosti parametra $m = 1$ . . . . 1 točka

d) Ugotovitev, da je premica naraščajoča, ko je $\frac{1-2m}{2} > 0$ . . . . 1 točka
Rešitev neenačbe $m < \frac{1}{2}$ . . . . 1 točka

2. a) Vsak ulomek posebej racionaliziramo. Ulomek $\frac{14\sqrt{15}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{10}}$ razširimo z $2\sqrt{5} - 3\sqrt{10}$. V števcu lahko po delnem korenjenju izpostavimo -10 in krajšamo z imenovalcem, dobimo

$3\sqrt{6}-2\sqrt{3}$. Ulomek $\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ razširimo z $\sqrt{3}$ in dobimo $3\sqrt{6}$. Rezultat je $-2\sqrt{3}$.
b) Izračunamo vsak člen posebej in nato seštejemo ter dobimo rezultat 19.

a) Razširitev prvega ulomka z $2\sqrt{5}-3\sqrt{10}$ .... 1 točka
Preoblikovanje prvega ulomka v $3\sqrt{6}-2\sqrt{3}$ .... 1 točka
Preoblikovanje drugega ulomka v $3\sqrt{6}$ .... 1 točka
Rezultat $-2\sqrt{3}$ .... 1 točka

b) Poenostavitev $0,36^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$ .... 1 točka
Poenostavitev $27^{\frac{2}{3}}=9$ .... 1 točka
Poenostavitev $0,04^{-\frac{1}{2}}=5$ .... 1 točka
Poenostavitev $16^{\frac{3}{4}}=8$ .... 1 točka
Ugotovitev $(0,25^{-\frac{1}{2}}-8^{-\frac{2}{3}})^0=1$ .... 1 točka
Rezultat 19 .... 1 točka

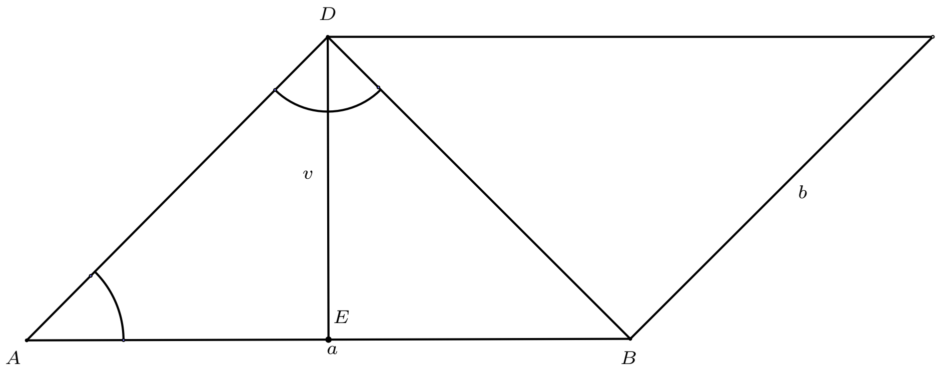
22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Rešitve nalog za Naloge za 3. letnik

1.

a) Načrtamo poltrak z izhodiščem v točki A. S šestilom odmerimo dolžino stranice a in dobimo oglišče B. Na navpičnico s šestilom odmerimo dolžino $v_a = 4cm$ in narišemo vzporednico k stranici a. S šestilom iz oglišča A in iz oglišča B načrtamo dolžino stranice b. Kjer loka sekata vzporednico k stranici a, dobimo oglišči C in D. Pri tem upoštevamo, da je kot $\angle BAD$ ostri.



b) Če narišemo višino na stranico AB iz oglišča D do stranice AB, dobimo pravokotni trikotnik AED. Ker hipotenuza tega trikotnika meri $4\sqrt{2}cm$, ena kateta pa $4cm$, lahko izračunamo velikost kota $\angle BAD$ s pomočjo kotne funkcije $sin\angle BAD = \frac{4}{4\sqrt{2}}$. Iskani kot $\angle BAD$ tako meri $45°$. V trikotniku AED izračunamo še dolžino preostale katete, ki prav tako meri $4cm$. Posledično kot $\angle ADE$ meri $45°$. Trikotnik BED je skladen s trikotnikom AED zato kot $\angle EDB$ meri $45°$. Če velikosti teh dveh kotov seštejemo, dobimo velikost iskanega kota $\angle ADB$, ki meri $90°$.

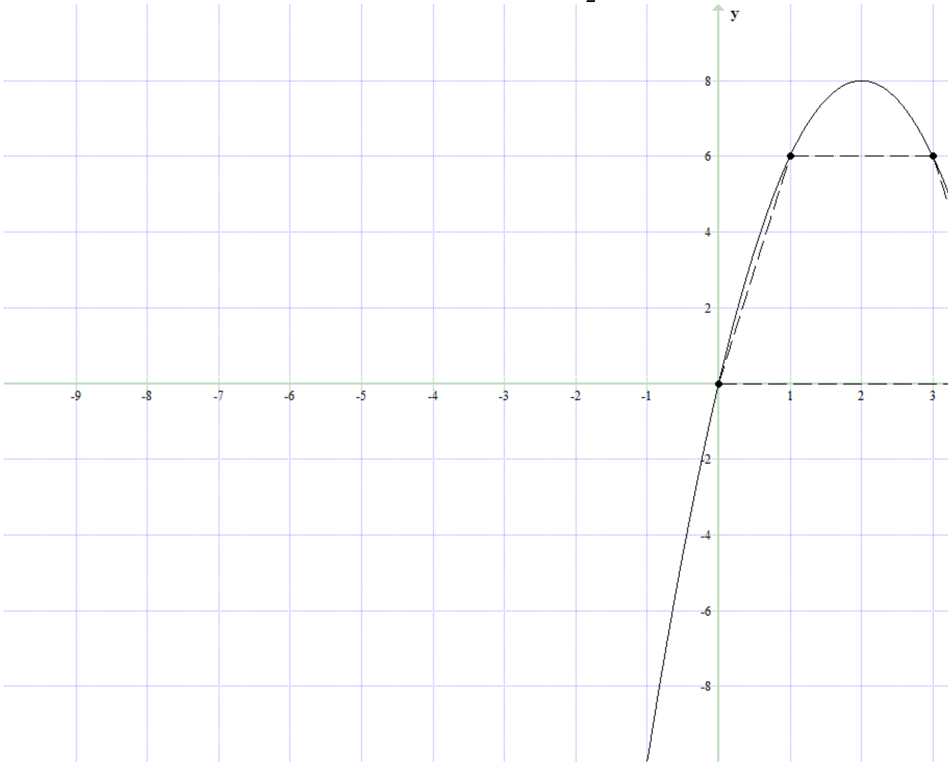
a) Načrtana stranica AB . . . . 1 točka
Načrtana višina v_a in vzporednica k stranici AB . . . . 1 točka
Načrtana natančna vrednost stranice BC in AD (npr. s pomočjo Pitagorovega izreka) . . . . 1 točka
Načrtan paralelogram $ABCD$ . . . . 1 točka

b) Uporaba kotne funkcije za izračun kota $\angle BAD$ . . . . 1* točka
Izračun kota $\angle BAD$ je $45°$ . . . . 1 točka
Izračun $|AE| = 4cm$ . . . . 1 točka
Izračun kota $\angle ADE$ je $45°$ . . . . 1 točka
Izračun kota $\angle BDE$ je $45°$ . . . . 1 točka
Izračun kota $\angle ADB$ je $90°$ . . . . 1 točka

2.

a) Kvadratno funkcijo $f(x) = -2(x-2)^2 + 8$ zapišemo v splošni obliki $f(x) = -2x^2 + 8x$ in z rešitvijo enačbe $f(x) = -2x^2 + 8x$ izračunamo ničli $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$. Zapišemo začetno vrednost $N(0,0)$ in izračunamo ali iz temenske oblike izpišemo koordinati temena $T(2,8)$. Narišemo graf kvadratne funkcije.

b) Kar oglišči A in B ležita v ničlah kvadratne funkcije, ugotovimo da je $|AB| = 4$, torej je stranica a dolga 4 enote. Iz naloge razberemo, da je stranica c dolga 2 enoti. Za izračun ploščine potrebujemo poleg dolžin stranic a in c tudi višino trapeza v. Višino trapeza nam določata ordinati točk C in D, ki ležita na paraboli. Ker je lik enakokraki trapez, sta abscisi točk C in D enako oddaljeni od premice $x = 2$ in sicer je abscisa točke C 3, abscisa točke D pa 1. Ordinata obeh točk, ki določa tudi višino trapeza je 6. Z uporabo obrazca $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ izračunamo



ploščino trapeza $S = \frac{4+2}{2} \cdot 6 = 18$.

a) Zapis funkcije v splošni obliki $f(x) = -2x^2 + 8x$ . . . . . 1 točka
Izračun ničel $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$ . . . . . 1 točka
Zapis ali upoštevanje začetne vrednosti $f(0) = 0$ . . . . . 1 točka
Zapis ali upoštevanje temena $T(2, 8)$ . . . . . 1 točka
Narisan graf kvadratne funkcije . . . . . 1 točka

b) Zapis ali uporaba $a = 4$ . . . . . 1 točka
Zapis ali uporaba abscise točke C $x_C = 1$ ali abscise točke D $x_D = 3$ . . . . . 1 točka
Izračun ordinate točke C $y_C = 6$ ali ordinate točke D $y_D = 6$ . . . . . 1 točka
Izračun ploščine $S = \frac{4+2}{2} \cdot 6 = 18$ . . . . . 1+1 točka

22. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Odbirno tekmovanje, 17. marec 2022

Rešitve nalog za Naloge za 4. letnik

1. Izračunamo število vseh izidov $n = 6^3 = 216$.

a) Izračunamo število ugodnih izidov $m = 3$, izračunamo verjetnost $P(A) = \frac{1}{72}$.

b) Izračunamo število ugodnih izidov $m = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, izračunamo verjetnosti $P(A) = \frac{5}{9}$.

c) Izračunamo število ugodnih izidov $m = 6$, izračunamo verjetnost $P(A) = \frac{1}{36}$.

d) Izračunamo število ugodnih izidov $m = 16$, izračunamo verjetnost$P(A) = \frac{2}{27}$.

e) Izračunamo število ugodnih izidih $m = 10$, izračunamo verjetnost $P(A) = \frac{5}{108}$.

Izračun števila vseh izidov $n = 6^3 = 216$ .... 1 točka

a) Izračun števila ugodnih izidov $m = 3$ .... 1 točka
Izračun verjetnosti $P(A) = \frac{1}{72}$ .... 1 točka

b) Izračun števila ugodnih izidov $m = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ in izračun verjetnosti $P(A) = \frac{5}{9}$ .. 1 točka

c) Izračun števila ugodnih izidov $m = 6$ .... 1 točka
Izračun verjetnosti $P(A) = \frac{1}{36}$ .... 1 točka

d) Izračun števila ugodnih izidov $m = 16$ .... 1 točka
Izračun verjetnosti $P(A) = \frac{2}{27}$ .... 1 točka

e) Izračun števila ugodnih izidov $m = 10$ .... 1 točka
Izračun verjetnosti $P(A) = \frac{5}{108}$ .... 1 točka

2. Enačbo kvadriramo in dobimo npr.: $6x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 9x + 3 = 4x^4 + 4x^2 + 1$. Enačbo uredimo npr.: $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$ in rešitve poiščemo s Hornerjevim algoritmom. Rešitve enačbe so: $x_1 = 1^{(2)}$, $x_2 = 2$ in $x_3 = \frac{1}{2}$. Zapišemo padajoče zaporedje $2, 1, \frac{1}{2}$.... Izračunamo količnik $q = \frac{1}{2}$. Izračunamo vsoto prvih desetih členov geometrijskega zaporedja npr.: $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot ((\frac{1}{2})^{10} - 1)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1023}{256}$.

Kvadriranje enačbe $6x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 9x + 3 = 4x^4 + 4x^2 + 1$ .... 1+1 točka
Ureditev enačbe $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$ .... 1 točka
Pravilna uporaba Hornerjevega algoritma .... 1* točka
Zapis rešitve $x_1 = 1^{(2)}$ .... 1 točka
Zapis rešitve $x_2 = 2$ .... 1 točka
Zapis rešitve $x_3 = \frac{1}{2}$ .... 1 točka
Izračun ali upoštevanje, da je količnik $q = \frac{1}{2}$ .... 1 točka
Uporaba obrazca za vsoto geometrijskega zaporedja .... 1* točka
Izračun vsote geometrijskega zaporedja $S_{10} = \frac{1023}{256}$ .... 1 točka