Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 2. april 2008

Naloge za 1. letnik

1. Poišči vsa realna števila x, za katera velja neenakost
$$|||2 - x| - x| - 8| \leq 2008.$$

2. Naj bo $ABCD$ štirikotnik in K taka točka znotraj trikotnika ABD, da sta si trikotnika ABD in KCD podobna. Dokaži, da sta si tedaj tudi trikotnika BCD in AKD podobna.

3. Poišči najmanjše trimestno število, za katero velja, da so vse števke njegovega trikratnika sode.

4. Stranica enakostraničnega trikotnika ABC je dolga 4 cm. Pravokotni projekciji razpolovišča D stranice AB na stranici BC in AC označimo z E in F. Izračunaj ploščino trikotnika DEF.

5. Na državnem tekmovanju so dijaki reševali 4 naloge. Vsaka je bila ovrednotena s celim številom točk, vsaj 0 in največ 7 točk. Tekmovanja se je udeležilo 42 dijakov. Natanko polovica tekmovalcev je dosegla vsaj 50 % točk. Za nagrado je zadoščalo zbrati vsaj 22 točk, to pa je uspelo šestini tekmovalcev.

   Tekmovalci, ki niso prejeli nagrade, so skupaj dosegli trikrat toliko točk, kot so jih skupaj dosegli vsi nagrajeni tekmovalci. Dokaži, da obstaja vsaj 6 tekmovalcev, ki so posamezno dosegli vsaj 25 % točk, a manj kot 50 % točk.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 2. april 2008

Naloge za 2. letnik

1. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe
$$\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7.$$

2. Dan je enakokrak trikotnik ABC z vrhom C. Naj bo A' nožišče višine na stranico BC. Denimo, da je $|CA'| = \frac{1}{2}|AB|$. Dokaži, da je tedaj trikotnik ABC enakostraničen.

3. Za števili a in b velja $a^3 + b^3 = 13$ in $a^9 + b^9 = -299$. Koliko je ab, če veš, da je število ab realno?

4. Naj bo D taka notranja točka stranice AB ostrokotnega trikotnika ABC, da je tudi trikotnik BCD ostrokotni. Označimo s H višinsko točko trikotnika BCD. Dokaži: če točke A, D, H in C ležijo na isti krožnici, je trikotnik ABC enakokrak.

5. Maja na tablo zapisuje naravna števila. Če je na tabli zapisano število n, zapiše na tablo še $3n + 13$. Če je na tabli zapisan popoln kvadrat, napiše tudi njegov koren.

   (a) Ali lahko Maja z omenjenima operacijama dobi število 55, če je na tabli že zapisano število 256?

   (b) Ali lahko Maja z omenjenima operacijama dobi število 256, če je na tabli že zapisano število 55?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 2. april 2008

Naloge za 3. letnik

1. Dokaži, da za vsako realno število $x \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ velja enakost
$$\frac{2}{1-\sin x} = \tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1.$$

2. Poišči vsa praštevila p, za katera ima polinom
$$q(x) = 2x^3 - 2px^2 + (1-p)x + p$$
vsaj eno racionalno ničlo.

3. Poišči vsa pozitivna realna števila x in y, za katera velja
$$x^{x+y} = y^{x-y} \quad \text{in} \quad x^2y = 1.$$

4. Naj bo $ABCD$ tak konveksen štirikotnik, da je trikotnik BCD ostrokoten in velja $|AB| = |AD|$. Presečišče simetrale kota $\angle CAD$ s stranico CD označimo s K, presečišče simetrale kota $\angle BAC$ s stranico BC pa z L. Naj bosta K' in L' pravokotni projekciji točk K in L na stranici BC in CD. Dokaži, da točke B, D, L' in K' ležijo na isti krožnici.

5. Danih je n naravnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za neko naravno število k, $k < n$, velja: če izmed danih n naravnih števil kakorkoli izberemo k števil, je vsota izbranih števil deljiva z n. Dokaži, da je tudi vsota $a_1+a_2+\ldots+a_n$ deljiva z n.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 2. april 2008

Naloge za 4. letnik

1. Za realni števili a in b velja $\frac{4a}{a+2b} - \frac{5b}{2a+b} = 1$. Kolikšno vrednost lahko zavzame $\frac{a-2b}{4a+5b}$?

2. Naj bo D razpolovišče stranice AB, T pa težišče trikotnika ABC. Izračunaj dolžine njegovih stranic, če velja $|AD| = 3$, $|DT| = 5$ in $|TA| = 4$.

3. Naj bo $n = (p^2 - 1)(p^2 - 4) + 9$. Koliko je najmanjša možna vsota števk števila n, če je p praštevilo? Za katera praštevila p je ta vsota dosežena?

4. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja
$$x + f(xf(y)) = f(y) + yf(x)$$
za poljubni realni števili x in y.

5. Če na vsaki mejni ploskvi kocke narišemo eno izmed dveh diagonal te ploskve, ugotovimo, da se nekatere narisane diagonale stikajo – izhajajo iz skupnega oglišča. Število parov stikajočih se diagonal označimo z N, pri čemer lahko posamezna diagonala nastopa tudi v več parih. Določi največjo in najmanjšo možno vrednost števila N.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 150 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

52. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Izbirno tekmovanje, 2. april 2008

Rešitve nalog

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Vse matematično in logično korektne rešitve so enakovredne. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. Najprej ločimo dve možnosti glede na vrednost izraza $2-x$. Če je $x \geq 2$, je $|2-x| = -(2-x)$ in lahko neenakost preoblikujemo v $||x-2-x|-8| \leq 2008$, kar je enakovredno $6 \leq 2008$. Torej vsa števila x, ki so večja ali enaka 2, zadoščajo neenakosti.

Naj bo še $x < 2$. Tedaj dobimo

$$||2-2x|-8| \leq 2008.$$

Ločimo dva primera glede na predznak izraza $2-2x$. Če je $x \geq 1$, je $|2-2x| = -(2-2x)$ in dobimo $|2x-10| \leq 2008$. Očitno za $1 \leq x < 2$ ta neenakost drži.

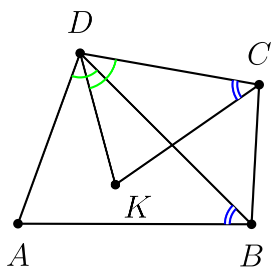
Ogledati si moramo še primer, ko je $x < 1$. Tedaj dobimo $|-2x+2-8| \leq 2008$ oziroma $|2x+6| \leq 2008$. Dobljena neenakost je enakovredna

$$-2008 \leq 2x+6 \leq 2008.$$

Ker je $x < 1$, sledi $2x+6 < 2+6 = 8$, zato desna ocena velja. Iz pogoja na levi strani pa sledi $-2014 \leq 2x$ oziroma $-1007 \leq x$. V tem primeru neenakosti zadoščajo števila x, za katera velja $-1007 \leq x < 1$.

Če združimo dobljene rezultate, sledi, da neenakost velja za vse $x \geq -1007$.

Obravnavanje možnosti $x \geq 2$ in $x < 2$ (ali $x > 2$ in $x \leq 2$ ali $x \geq 2$ in $x \leq 2$) . . 1 točka
Sklep, da neenakost drži pri $x \geq 2$ (ali $x > 2$) . . . . 1 točka
Sklep, da neenakost velja za $1 \leq x < 2$ (ali $1 < x < 2$ ali $1 \leq x \leq 2$) . . . . 2 točki
Sklep, da je neenakost izpolnjena za $-1007 \leq x \leq 1$ (ali $-1007 \leq x < 1$) . . . . 2 točki
Sklep, da ustrezajo vsa števila $x \geq -1007$ . . . . 1 točka



I/2. Ker sta si trikotnika ABD in KCD podobna, velja $\angle ADB = \angle KDC$ in $\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|DK|}{|DC|}$. Izračunamo lahko, da je

$$\angle ADK = \angle ADB - \angle BDK = \angle KDC - \angle BDK = \angle BDC,$$

od koder zaradi $\frac{|DA|}{|DK|} = \frac{|DB|}{|DC|}$ sledi, da sta si tudi ADK in DBC podobna, saj se ujemata v kotu in razmerju priležnih stranic.

Ugotovitev $\angle ADB = \angle KDC$ . . . . 1 točka
Zapis razmerja $\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|DK|}{|DC|}$ ali ekvivalentnega . . . . 2 točki
Izračun $\angle ADK = \angle BDC$ . . . . 2 točki
Sklep, da sta si trikotnika ADK in BDC podobna . . . . 2 točki

I/3. 1. način Označimo trimestno število z $\overline{abc}$. Trikratnik tega števila je enak

$$3 \cdot \overline{abc} = (3a) \cdot 100 + (3b) \cdot 10 + 3c.$$

Najmanjše možno število na mestu stotic je $a = 1$. Da bo v tem primeru števka na mestu stotic v $3 \cdot \overline{abc}$ soda, mora biti $3b \cdot 10 + 3c \geq 100$, od koder sledi $10b + c \geq \frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3}$. Najmanjše število, ki tej neenakosti zadošča je 34, torej je iskano število 134, njegov trikratnik pa 402.

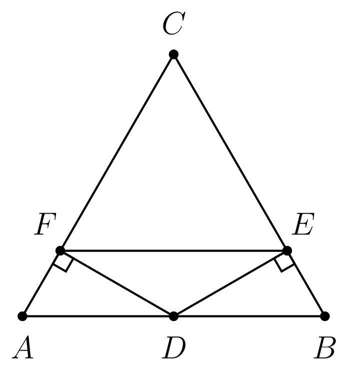
Ugotovitev oziroma poskus $a = 1$ .... **2 točki**
Ocena, da mora biti $3 \cdot (10b + c) \geq 100$ **ali podobna** .... **2 točki**
Ugotovitev, da je najmanjša možnost pri $\overline{bc} = 34$ .... **2 točki**
Rešitev je 134 .... **1 točka**

2. način Oglejmo si kakšno je lahko število, sestavljeno iz samih sodih števk, ki je trikratnik naravnega števila. Ker je število trimestno, je trikratnik vsaj 300. Ker pa ima trikratnik le sode števke, je števka na mestu stotic vsaj 4. Najmanjše trimestno število, ki je vsaj 400 in je deljivo s 3, je 402. Vse števke so sode, zato je $\frac{402}{3} = 134$ iskano trimestno število.

Ugotovitev, da je trikratnik vsaj 300 .... **2 točki**
Ugotovitev, da je potem števka stotic trikratnika vsaj 4 .... **2 točki**
Sklep, da je zaradi deljivosti s 3 **trikratnik vsaj** 402 .... **2 točki**
Rešitev je 134 .... **1 točka**

I/4.

1. način Očitno je $|DA| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 2$. Trikotnik DBE ima kote enake $60°$, $90°$ in $30°$, torej je enak polovici enakostraničnega trikotnika, zato je $|BE| = \frac{|BD|}{2} = 1$. Podobno velja za trikotnik ADF, torej je skladen trikotniku BDE. Dolžina stranice DE oziroma DF je enaka $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BD| = \sqrt{3}$. Ploščina posameznega trikotnika je tako enaka $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



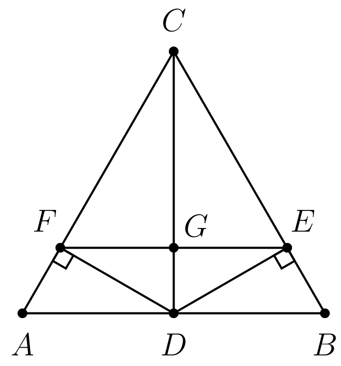
Trikotnik ECF ima stranici dolžine $|CF| = |CA| - |AF| = 3$ in $|CE| = |CB| - |EB| = 3$, torej je enakokrak trikotnik s kotom $60°$ pri vrhu, tj. enakostraničen. Ploščina tega trikotnika je tako enaka $\frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Ploščino trikotnika DEF torej lahko izračunamo tako, da ploščini trikotnika ABC odštejemo ploščine trikotnikov DBE, ADF in ECF. Dobimo, da je iskana ploščina enaka

$$\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ugotovitev $|AD| = 2$ **ali** $|BD| = 2$ .... **1 točka**
Sklep $|BE| = 1$ **ali** $|AF| = 1$ .... **1 točka**
Izračun, da je $|DE| = \sqrt{3}$ **ali** $|DF| = \sqrt{3}$ .... **1 točka**
Izračun ploščin trikotnikov DBE **in** ADF .... **1 točka**
Ugotovitev, da je CEF **enakostranični trikotnik** .... **1 točka**
Izračun ploščine trikotnika CEF .... **1 točka**
Izračun ploščine trikotnika DEF .... **1 točka**

2. način Očitno je $|DA| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 2$. Trikotnika AFD in BED imata kote enake $60°$, $90°$ in $30°$ ter se ujemata v dolžini hipotenuze, zato sta skladna. To pomeni $|DE| = |DF|$, torej je trikotnik DEF enakokrak. Označimo z G presečišče daljic CD in EF. Ker je $\angle FDG = \angle GDE = 60°$, je DG višina trikotnika DEF. Zato sta tudi trikotnika DGE in DGF skladna in imata kote enake $60°$, $90°$ in $30°$.



Trikotniki ADC, AFD in DGF so si torej podobni. Iz podobnosti ADC in AFD sledi $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|AD|}$, od koder sledi $|AF| = 1$. Prav tako velja $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AF|}{|FD|}$, od koder dobimo $|FD| = \sqrt{3}$.

Podobnost trikotnikov ADC in DGF pa nam da $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DG|}{|DF|}$, torej je $|DG| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podobno iz $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|DG|}{|GF|}$ sledi $|GF| = \frac{3}{2}$.

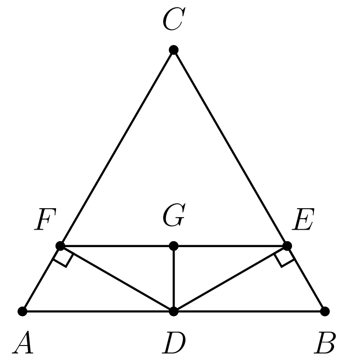
Ploščina trikotnika DEF je enaka vsoti ploščin trikotnikov FGD in DGE, torej je enaka

$$|DG| \cdot |FG| = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ugotovitev $|AD| = 2$ **ali** $|BD| = 2$ .... **1 točka**
Izračun $|BE| = 1$ **ali** $|AF| = 1$ .... **1 točka**
Izračun, da je $|DE| = \sqrt{3}$ **ali** $|DF| = \sqrt{3}$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je daljica CD **pravokotna na daljico** EF .... **1 točka**
Izračun $|DG| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... **1 točka**
Izračun $|FG| = \frac{3}{2}$ .... **1 točka**
Izračun ploščine trikotnika DEF .... **1 točka**

3. način Očitno je $|DA| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 2$. Trikotnika AFD in BED imata kote enake $60°$, $90°$ in $30°$ ter se ujemata v dolžini hipotenuze, zato sta skladna. Torej je $|DE| = |DF| = \sqrt{3}$. Označimo z G razpolovišče daljice EF. Ker je $EF \parallel AB$, sta trikotnika FGD in EGD skladna pravokotna in $\angle DFG = \angle DEG = 30°$. Torej je

$$p_{DEF} = 2p_{DFG} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$



Ugotovitev $|AD| = 2$ **ali** $|BD| = 2$ .... **1 točka**
Izračun $|BE| = 1$ **ali** $|AF| = 1$ .... **1 točka**
Izračun, da je $|DE| = \sqrt{3}$ **ali** $|DF| = \sqrt{3}$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je daljica CD **pravokotna na daljico** EF .... **1 točka**
Izračun $|DG| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .... **1 točka**
Izračun $|FG| = \frac{3}{2}$ .... **1 točka**
Izračun ploščine trikotnika DEF .... **1 točka**

I/5. Nagrade je prejela šestina tekmovalcev, torej 7. V zgornjo polovico se je uvrstilo 21 tekmovalcev, zato jih je $21 - 7 = 14$ doseglo med 14 in 21 točk.

Vsak nagrajeni tekmovalec je dosegel vsaj 22 točk, zato so vsi nagrajeni skupaj dosegli vsaj $22 \cdot 7 = 154$ točk.

Naj x označuje število tekmovalcev, ki so prejeli vsaj 25 % in manj kot 50 % točk, to je vsaj 7 in največ 13 točk. Potem je število tekmovalcev, ki so dosegli največ 6 točk, enako $42 - 21 - x = 21 - x$.

Izračunajmo še, koliko točk so dosegli nenagrajeni tekmovalci. Tisti z največ 6 točkami so vsi skupaj dosegli največ $6 \cdot (21 - x)$ točk. Tisti, ki so prejeli vsaj 7 in največ 13 točk, so skupaj dosegli največ $13x$ točk. Upoštevati moramo še nenagrajene tekmovalce v zgornji polovici, ki jih je 14, vsak izmed njih pa je prejel največ 21 točk, torej so prejeli največ $21 \cdot 14 = 294$.

Nenagrajeni tekmovalci skupaj so tako skupaj prejeli največ $6 \cdot (21 - x) + 13x + 294 = 420 + 7x$ točk. Po drugi strani pa vemo, da so prejeli trikrat toliko točk kot nagrajeni tekmovalci, to pomeni vsaj $3 \cdot 154 = 462$ točk. Od tod sledi

$$462 \leq 420 + 7x,$$

kar je enakovredno pogoju $7x \geq 42$ oziroma $x \geq 6$. To pa ravno pomeni, da obstaja vsaj 6 tekmovalcev, ki so posamezno dosegli vsaj 25 % točk, a manj kot 50 % točk.

Ocena, da so nagrajeni tekmovalci dosegli vsaj 154 točk .... 1 točka
Sklep, da so potem nenagrajeni tekmovalci dosegli vsaj $3 \cdot 154 = 462$ točk .... 1 točka
Ugotovitev, da je 14 tekmovalcev doseglo med 14 in 21 točk .... 1 točka
Uvedba oznake x za število tistih z vsaj 7 in največ 13 točkami ter ugotovitev, da je potem $21 - x$ takih, ki so dosegli največ 6 točk (ali podobno)................ 1 točka
Ocena, da so nenagrajeni tekmovalci dosegli največ $420 + 7x$ točk .... 1 točka
Zapis neenakosti $426 \leq 420 + 7x$ .... 1 točka
Odgovor, da je vsaj 6 tekmovalcev z vsaj 25 % a manj kot 50 % točk .... 1 točka

II/1. Če je (x, y) par števil, ki reši enačbo, potem enačbo reši tudi $(-x, y)$. Zato je dovolj opazovati le tista števila x, ki so nenegativna. Pomnožimo enačbo z $2y$, da dobimo $x^2y + 10 = 14y$, od koder lahko izrazimo

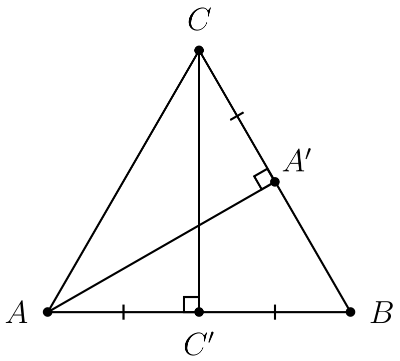
$$y = \frac{10}{14 - x^2}.$$

Od tod sledi, da mora biti $14 - x^2$ delitelj števila 10, zato je $-10 \leq 14 - x^2 \leq 10$ oziroma $-24 \leq -x^2 \leq -4$, torej mora biti $24 \geq x^2 \geq 4$. Ker smo privzeli, da je $x \geq 0$, dobimo $5 > x \geq 2$. Izračunamo lahko, da pri $x = 2$ dobimo $y = 1$, pri $x = 3$ dobimo $y = 2$ in pri $x = 4$ sledi $y = -5$. Torej so vse celoštevilske rešitve enačbe pari $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, -5)$, $(-2, 1)$, $(-3, 2)$ in $(-4, -5)$.

Zapis $(x^2 - 14)y = -10$ ali $y = \frac{10}{14-x^2}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je število $x^2 - 14$ ali število y delitelj 10..................... 1 točka
Ocena $4 \leq x^2 \leq 24$ ali zapis možnosti za delitelje .... 2 točki
(Za obravnavanje samo pozitivnih deliteljev števila 10 dodelite 1 točko)
Zapis rešitev .... po 1 točka za vsaki dve rešitvi
(Za 1 zapisano rešitev torej dodelite 0 točk, za 2 ali 3 rešitve 1 točko, za 4 ali 5 rešitev 2 točki in za vse rešitve 3 točke)

II/2.

1. način Naj bo C' nožišče višine iz C. Ker je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C, je $|AC'| = |C'B| = \frac{1}{2}|AB| = |CA'|$.



Trikotnika ABA' in CBC' sta pravokotna in velja $\angle ABA' = \angle CBC'$, zato sta si podobna. Tako velja $\frac{|AB|}{|BA'|} = \frac{|CB|}{|BC'|}$. Če označimo s c dolžino stranice $|AB|$ in z $x = |BA'|$, lahko dobljeno enakost prepišemo v obliko

$$\frac{c}{x} = \frac{\frac{c}{2} + x}{\frac{c}{2}},$$

oziroma v kvadratno enačbo $2x^2 + cx - x^2 = 0$. Slednjo lahko razstavimo kot $(2x-c)(x+c) = 0$ in, ker sta x in c pozitivni, sledi $x = \frac{c}{2}$.
Dolžina stranice BC je tako enaka c, torej je $|AC| = |BC| = |AB| = c$, zato je trikotnik ABC enakostraničen.

Ugototovitev, da sta trikotnika ABA' in CBC' podobna .... **2 točki**
Zapis podobnosti $\frac{|AB|}{|BA'|} = \frac{|CB|}{|BC'|}$ .... **1 točka**
Preoblikovanje podobnosti v enačbo $(2x - c)(x + c) = 0$ (ali ekvivalentno) ..... **2 točki**
Sklep, da je $x = \frac{c}{2}$ (ali ekvivalenten) .... **1 točka**
Sklep, da je potem trikotnik ABC enakostraničen .... **1 točka**

2. način Označimo dolžino stranice AC z a, dolžino stranice AB pa s c. Potem je $|CA'| = \frac{c}{2}$ in $|A'B| = a - \frac{c}{2}$. Višino AA' lahko potem izračunamo na dva načina, saj je kateta v pravokotnih trikotnikih ACA' in ABA'. Če je $|AA'| = v$, potem iz Pitagorovega izreka v prvem trikotniku dobimo $v^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}$, v drugem pa $v^2 = c^2 - (a - \frac{c}{2})^2$, torej velja

$$a^2 - \frac{c^2}{4} = c^2 - a^2 + ac - \frac{c^2}{4}$$

oziroma $2a^2 - ac - c^2 = 0$. Dobljeno kvadratno enačbo lahko razcepimo kot $(2a+c)(a-c) = 0$, od koder sledi, da je $a = c$, saj pogoj $2a+c = 0$ ne more biti izpolnjen, ker sta a in c pozitivni števili. Ker pa je $|BC| = |AC| = a = c$, so vse tri stranice enako dolge, torej je trikotnik enakostraničen.

Zapis Pitagorovega izreka v trikotniku ABA' .... **1 točka**
Zapis Pitagorovega izreka v trikotniku ACA' .... **1 točka**
Zapis ene enačbe, v kateri nastopajo le dolžine stranic, ne pa tudi dolžine višin, na primer $a^2 - \frac{c^2}{4} = c^2 - a^2 + ac - \frac{c^2}{4}$ .... **1 točka**
Preoblikovanje v enačbo $(2a + c)(a - c) = 0$ (ali ekvivalentno) .... **2 točki**
Sklep, da je $a = c$ (ali ekvivalenten) .... **1 točka**
Sklep, da je potem trikotnik ABC enakostraničen .... **1 točka**

3. način Naj bo C' nožišče višine iz C. Ker je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C, je $|AC'| = |C'B| = \frac{1}{2}|AB| = |CA'|$.
Naj H označuje višinsko točko in naj bo γ kot pri C. Potem je $\angle ACC' = \angle C'CB = \frac{\gamma}{2}$.

Velja še $\angle A'HC = \pi - \angle HA'C - \angle HCA' = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, zato je tudi $\angle AHC' = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Od tod sledi, da je

$$\angle C'AH = \pi - \angle AC'H - \angle AHC' = \frac{\gamma}{2}.$$

Trikotnika AHC' in CHA' se ujemata v kotih in dolžini katete pri kotu $\frac{\gamma}{2}$, zato sta skladna. Torej je $|CH| = |AH|$, zato je trikotnik AHC enakokrak, torej velja $\angle HAC = \angle ACH = \frac{\gamma}{2}$. Dobili smo $\angle BAC = \angle C'AH + \angle HAC = \gamma$, torej so vsi trije notranji koti trikotnika enaki γ, od koder sledi, da je trikotnik enakostraničen.

Izračun, da je $\angle C'AH = \angle HCA'$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da sta trikotnika AHC' in CHA' skladna .... **2 točki**
Sklep $|AH| = |CH|$ .... **1 točka**
Sklep, da je trikotnik AHC enakokrak .... **1 točka**
Izračun $\angle BAC = \angle ACB$ .... **1 točka**
Sklep, da je potem trikotnik ABC enakostraničen .... **1 točka**

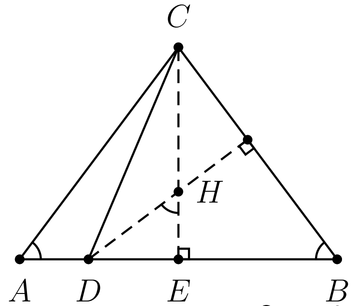
II/3. 1. način Ker je $a^9 + b^9 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$, je $a^6 - a^3b^3 + b^6 = -\frac{299}{13} = -23$. Upoštevamo še, da je $a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 = 13^2 = 169$. Enakosti odštejemo in dobimo $3a^3b^3 = 192$, od koder sledi $ab = 4$, saj je ab realno število.

Razcep $a^9 + b^9 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$ .... **2 točki**
Sklep $a^6 - a^3b^3 + b^6 = -23$ .... **1 točka**
Zapis $(a^3 + b^3)^2 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$ .... **2 točki**
Sklep $3a^3b^3 = 192$ (ali ekvivalenten) .... **1 točka**
Odgovor $ab = 4$ .... **1 točka**

2. način Velja $13^3 = (a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9 = -299 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6$, od koder sledi $832 = a^6b^3 + a^3b^6$. Če izraz na desni razcepimo, dobimo $832 = a^3b^3(a^3 + b^3) = a^3b^3 \cdot 13$, od koder sledi $a^3b^3 = \frac{832}{13} = 64$, torej je $ab = 4$, saj je ab realno število.

Zapis $(a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9$ .... **2 točki**
Izračun $832 = a^6b^3 + a^3b^6$ (ali ekvivalenten) .... **1 točka**
Razcep $a^6b^3 + a^3b^6 = a^3b^3(a^3 + b^3)$ (ali ekvivalenten) .... **2 točki**
Sklep $a^3b^3 = 64$ .... **1 točka**
Odgovor $ab = 4$ .... **1 točka**

II/4. Označimo $\angle BAC = \alpha$. Ker so točke A, D, H in C konciklične, je $\angle DHC = \pi - \angle BAC = \pi - \alpha$.
Označimo z E nožišče višine iz točke C na stranico BD. Velja $\angle DHE = \pi - \angle DHC = \alpha$, zato je $\angle HDB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Od tod nazadnje zaradi pravokotnosti premice DH na stranico BC sledi, da je $\angle CBA = \frac{\pi}{2} - \angle BDH = \alpha$, torej je trikotnik ABC res enakokrak.



Ugotovitev $\angle DHC = \pi - \angle BAC$ ali $\angle DHE = \angle BAC$ .... **2 točki**
Izračun $\angle HDB = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (oz. enakovreden) .... **2 točki**

Ugotovitev $\angle DBC = \alpha$ .... 2 točki
Sklep, da je trikotnik ABC enakokrak .... 1 točka

II/5. Če je na tabli zapisano število 256, Maja lahko dobi število 55 in sicer tako, da 256 najprej koreni, da dobi 16. Iz 16 potem lahko dobi $3 \cdot 16 + 13 = 61$, iz tega števila pa naprej še $3 \cdot 61 + 13 = 196$. Število 196 lahko koreni, da dobi 14, nato pa iz njega $3 \cdot 14 + 13 = 55$. (Opomba: možno je, da obstaja več načinov kako lahko iz števila 256 dobi število 55, vendar je ta način edini, ki potrebuje manj kot 100 korakov).

Pokažimo, da iz števila 55 ne more dobiti števila 256. Oglejmo si ostanke pri deljenju s 4. Če je število sodo, je oblike $2k$, kvadrat tega števila je potem oblike $4k^2$. Če pa je število liho, je oblike $2k+1$, zato je kvadrat tega števila enak $4k^2 + 4k + 1$, torej da pri deljenju s 4 ostanek 1. Torej, število je popoln kvadrat le, če da pri deljenju s 4 ostanek 0 ali 1, zato bomo lahko korenili le taka števila.

Število 55 da pri deljenju s 4 ostanek 3. Če na številu oblike $4k+3$ uporabimo pravilo $n \mapsto 3n+13$, dobimo $12k+9+13 = 4(3k+5)+2$, torej število, ki da ostanek 2. Če pa pravilo uporabimo na številu oblike $4k+2$, dobimo $12k+6+13 = 4(3k+4)+3$, torej število, ki da ostanek 3 pri deljenju s 4. To pomeni, da bomo iz števila 55 po enem koraku dobili število, ki da pri deljenju s 4 ostanek 2, nato število z ostankom 3, nato spet število z ostankom 2 in tako naprej. Ker pa je število 256 deljivo s 4, ga Maja na ta način ne bo dosegla.

Zapis kako lahko Maja iz števila 256 dobi število 55 .... 2 točki
Opazovanje deljivosti s poljubnim številom pri uporabi pravil .... 1 točka
Ugotovitev, da imajo popolni kvadrati pri deljenju s 4 ostanek 0 ali 1 .... 1 točka
Ugotovitev, da iz števila 55 lahko dobimo le števila, ki imajo pri deljenju s 4 ostanke 2 ali 3 .... 2 točki
Sklep, da Maja v drugem primeru ne more zapisati števila 256 .... 1 točka

III/1.

1. način S pomočjo adicijskega izreka za tangens lahko zapišemo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{4}}\right)^2.$$

Če upoštevamo, da je $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ in zapišemo $\tan\frac{x}{2}$ s sinusi in kosinusi, naprej sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + 1}{1 - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Po kvadriranju dobimo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

in od tod z upoštevanjem zvez $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$ in $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x$ sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \frac{2}{1 - \sin x} - 1.$$

Torej enakost res drži.

Uporaba adicijskega izreka za tangens .... **1 točka**
Upoštevanje $\tan\frac{\pi}{4}=1$ .... **1 točka**
Zapis s $\sin$ **in** $\cos$ .... **1 točka**
Zapis kvadriranega izraza $\frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$ .... **1 točka**
Upoštevanje zveze $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$ .... **1 točka**
Upoštevanje $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$ .... **1 točka**
Zaključek .... **1 točka**

2. način Če zapišemo tangens s sinusom in kosinusom, dobimo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)^2.$$

Z upoštevanjem adiciskih izrekov za sinus in kosinus, naprej sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}\right)^2.$$

Vemo, da je $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, torej je izraz enak

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Po kvadriranju dobimo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

od koder z upoštevanjem $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$ in $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$ sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{2}{1-\sin x}-1.$$

Torej enakost res drži.

Zapis s $\sin$ **in** $\cos$ .... **1 točka**
Uporaba adicijskih izrekov za sinus in kosinus .... **1 točka**
Upoštevanje $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **in** $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .... **1 točka**
Zapis kvadriranega izraza $\frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$ .... **1 točka**
Upoštevanje zveze $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$ .... **1 točka**
Upoštevanje $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin x$ .... **1 točka**
Zaključek .... **1 točka**

III/2. Če je $p=2$, je $q(x)=2x^3-4x^2-x+2=(x-2)(2x^2-1)$ in ima racionalno ničlo $x=2$. Naj bo zdaj p liho praštevilo. Edini kandidati za racionalne ničle so ±1, $\pm p$, $\pm\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{p}{2}$. Izračunajmo vse možnosti.

Velja $q(1) = 3 - 2p$ in ker je $3 - 2p$ liho, je $q(1) \neq 0$. Jasno je $q(-1) = -3 \neq 0$. Tudi izraz $q(-p) = -p^2 + 2p = p(2 - p)$ je različen od 0, saj je $p \neq 2$. Podobno je $q(p) = -4p^3 + p^2 = p^2(1 - 4p) \neq 0$ in $q(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \neq 0$. Preverimo lahko tudi $q(-\frac{1}{2}) = p - \frac{3}{4} \neq 0$ ter $q(\frac{p}{2}) = \frac{-p^3-2p^2+6p}{4}$. Ker je p lih, je števec zadnjega izraza lih, zato izraz ne more biti enak 0. Ostane še $q(-\frac{p}{2}) = \frac{-3p^3+2p^2+2p}{4}$. Spet izraz ne more biti enak 0, saj je števec lih.

Za liha praštevila torej polinom q nima racionalnih ničel, kar pomeni, da je edino ustrezno praštevilo $p = 2$.

Ugotovitev, da so racionalne ničle polinoma lahko le ± 1, $\pm p$, $\pm\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{p}{2}$ ...... 1 točka
Utemeljitev, da števili 1 in -1 nista ničli ...... 1 točka
Utemeljitev, da števili $\frac{1}{2}$ in $-\frac{1}{2}$ nista ničli ...... 1 točka
Utemeljitev, da števili p in $-p$ nista ničli pri $p \neq 2$ ...... 1 točka
Utemeljitev, da števili $\frac{p}{2}$ in $-\frac{p}{2}$ nista ničli pri lihih p ...... 1 točka
Pri $p = 2$ je $x = 2$ racionalna ničla polinoma ...... 1 točka
Sklep, da je edino tako praštevilo $p = 2$ ...... 1 točka

III/3. Iz druge enačbe sledi $y = x^{-2}$, torej imamo

$$x^{x+x^{-2}} = x^{-2(x-x^{-2})}.$$

Enačbo logaritmiramo in dobimo

$$(x + x^{-2}) \log x = -2(x - x^{-2}) \log x.$$

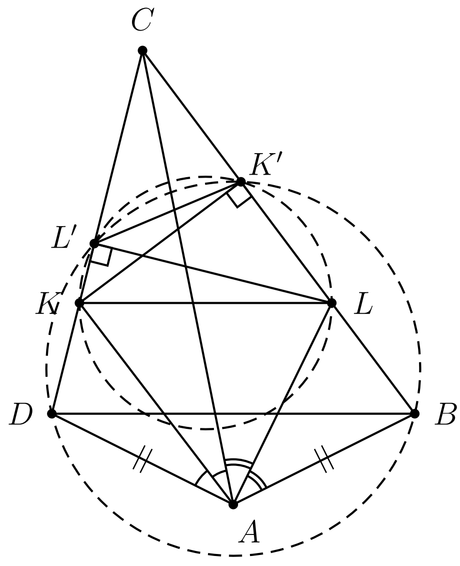
Če je $\log x = 0$, je $x = 1$ in potem $y = 1$. Sicer pa velja

$$x + x^{-2} = -2x + 2x^{-2}$$

oziroma $3x^3 = 1$. Od tod sledi $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ in nato $y = \sqrt[3]{9}$. Dobili smo dve rešitvi.

Zapis ene enačbe samo z x ali samo z y ...... 2 točki
Rešitev $x = 1$, $y = 1$ ...... 2 točki
Primerjava eksponentov, to je enačba $x + x^{-2} = -2x + 2x^{-2}$ ali ekvivalentna . 1 točka
Rešitev $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y = \sqrt[3]{9}$ ...... 2 točki

III/4. Po sinusnem izreku v trikotniku BAL velja



$$\frac{\sin(\angle BAL)}{|BL|} = \frac{\sin(\angle ALB)}{|AB|}.$$

Podobno velja v trikotniku CAL, da je

$$\frac{\sin(\angle LAC)}{|CL|} = \frac{\sin(\angle CLA)}{|AC|}.$$

Ker je $\angle ALB = \pi - \angle CLA$, velja $\sin \angle ALB = \sin \angle CLA$. Torej iz zgornjih enačb z upoštevanjem $\angle BAL = \angle LAC$ dobimo

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|CL|}.$$

Podobno sledi še $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DK|}{|CK|}$.
(Dejstvo, da simetrala kota razdeli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic je znano in ga ni potrebno dokazovati prek sinusnega izreka. Zadošča sklep: ker je AL simetrala kota $\angle BAC$, je $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|CL|}$.)
Ker je $|AB| = |AD|$, iz dobljenih enakosti sledi $\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{|DK|}{|CK|}$. Zato velja

$$\frac{|CB|}{|CL|} = \frac{|BL| + |CL|}{|CL|} = \frac{|BL|}{|CL|} + 1 = \frac{|DK|}{|CK|} + 1 = \frac{|DK| + |CK|}{|CK|} = \frac{|CD|}{|CK|}.$$

Trikotnika DBC in KLC sta si podobna, saj imata skupen kot pri C in velja $\frac{|CB|}{|CL|} = \frac{|CD|}{|CK|}$. Torej je premica KL vzporedna diagonali BD. Zaradi pravih kotov pri K' in L' so točke K, L, K' in L' konciklične. Ker je trikotnik BCD ostrokoten, ležita točki K' in L' na istem bregu premice KL in na istem bregu premice BD. Torej velja

$$\angle DL'K' = \angle KL'K' = \pi - \angle K'LK = \pi - \angle K'BD$$

in zato so točke B, D, L' in K' konciklične.

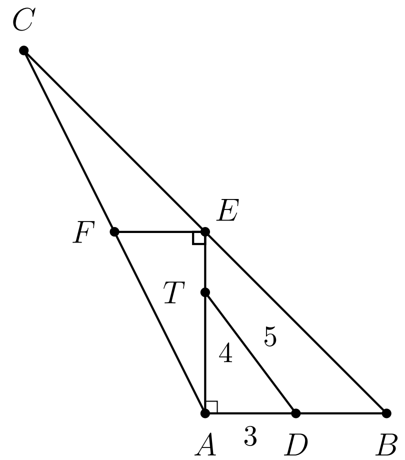
Ugotovitev, da so K', L', K, L konciklične .... 1 točka
Ugotovitev $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|CL|}$ .... 1 točka
Ugotovitev $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DK|}{|CK|}$ .... 1 točka
Sklep, da potem velja $\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{|DK|}{|CK|}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da sta trikotnika DBC in KLC podobna .... 1 točka
Sklep, da je KL vzporedna BD .... 1 točka
Sklep, da so B, D, L', K' konciklične .... 1 točka
(Če je dokazana koncikličnost K', L', K, L in je pokazano, da je koncikličnost B, D, L', K' ekvivalentna trditvi, da je KL vzporedna BD, razmerja pa niso uporabljena, priznajte 2 točki.)

III/5. Če je $k = 1$, je vsako izmed števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deljivo z n, torej je z n deljiva tudi njihova vsota. Naj bo torej $1 < k < n$. Naj bo $i \neq j$. Ker množica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \backslash \{a_i, a_j\}$ vsebuje $n - 2 \geq k - 1$ elementov, si lahko izberemo podmnožico S s $k - 1$ elementi. Potem sta $S \cup \{a_i\}$ in $S \cup \{a_j\}$ k-terici števil, zato sta njuni vsoti deljivi z n, torej je tudi razlika njunih vsot deljiva z n. Ta razlika je enaka $a_i - a_j$. Torej n deli $a_i - a_j$. Ker sta bila i in j poljubna, to pomeni, da imajo števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enake ostanke pri deljenju z n, ker pa jih je skupaj n, je njihova vsota deljiva z n.

Dokaz naloge, če je $k = 1$ .... 1 točka
Ugotovitev, da imata neki števili (na primer a_1 in a_2 ali a_k in a_{k+1} ali a_{n-1} in a_n) enak ostanek pri deljenju z n (pri vsakem k) .... 2 točki
Dokaz, da imajo vsa števila enak ostanek pri deljenju z n .... 2 točki
Sklep, da je $a_1 + \ldots + a_n$ deljivo z n .... 2 točki
(Če tekmovalec naloge ne reši, reši pa nalogo za primer $k = 2$ ali $k = n - 1$, priznajte dodatno 1 točko, če s tem ne preseže 3 točk.)

IV/1. Najprej opazimo, da izraza $a + 2b$ in $2a + b$ ne smeta biti enaka 0, torej števili a in b hkrati ne smeta biti enaki 0. V enačbi $\frac{4a}{a+2b} - \frac{5b}{2a+b} = 1$ odpravimo ulomke in dobimo $8a^2 + 4ab - 5ab - 10b^2 = 2a^2 + 5ab + 2b^2$, kar lahko preoblikujemo v $6(a + b)(a - 2b) = 0$. Če je $a = -b$, je vrednosti izraza $\frac{a-2b}{4a+5b}$ enaka $\frac{-3b}{b} = -3$, saj mora biti b različen od 0 (kajti a in b ne smeta biti hkrati enaki 0). Če pa je $a = 2b$, je vrednost izraza $\frac{a-2b}{4a+5b}$ enaka 0, saj je spet imenovalec neničeln. Torej je vrednost izraza lahko enaka 0 ali -3.

Odpravljanje ulomkov v enačbi $\frac{4a}{a+2b} - \frac{5b}{2a+b} = 1$ .... 1 točka
Razcep $6(a + b)(a - 2b) = 0$ .... 1 točka
Primer $a = -b$ in vrednosti -3 .... 2 točki
(Če ni komentarja, da števili a in b hkrati nista enaki 0, priznajte samo 1 točko.)
Primer $a = 2b$ in vrednosti 0 .... 2 točki
(Če ni komentarja, da števili a in b hkrati nista enaki 0, priznajte samo 1 točko.)
Sklep, da je vrednost izraza lahko 0 ali -3 .... 1 točka



IV/2. Točka D je razpolovišče stranice AB in zaradi $|AD| = 3$ sledi $|AB| = 6$. Označimo z E razpolovišče stranice BC in s F razpolovišče AC. V trikotniku ADT za dolžine stranic velja Pitagorov izrek, zato je ta trikotnik pravokotni. Ker težišče deli težiščnico v razmerju 2 proti 1 in je $|AT| = 4$, je zato $|AE| = 6$. Torej v pravokotnem trikotniku ABE poznamo dolžini katet, zato lahko po Pitagorovem izreku izračunamo $|BE| = \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$. Od tod sledi, da je $|BC| = 2|BE| = 12\sqrt{2}$.
Ker sta E in F razpolovišči stranic BC in AC, je EF vzporedna z AB. Ker pa je EA pravokotna na AB, je EA pravokotna tudi na EF. Torej je trikotnik AEF pravokotni. Vemo že, da je $|AE| = 6$, velja pa še, da je $|EF| = \frac{|AB|}{2} = 3$. Torej lahko izračunamo dolžino FA po Pitagorovem izreku in sicer

$$|FA| = \sqrt{|EF|^2 + |AE|^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}.$$

Od tod sledi, da je dolžina stranice AC enaka $|AC| = 2|AF| = 6\sqrt{5}$.

Sklep $|AB| = 6$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik ADT pravokotni .... 2 točki

Izračun dolžine $|BC| = 12\sqrt{2}$ .... **2 točki**
Izračun dolžine $|AC| = 6\sqrt{5}$ .... **2 točki**

IV/3. Izračunajmo prvih nekaj števil n. Pri $p = 2$ dobimo $n = 9$, pri $p = 3$ je $n = 49$ in pri $p = 5$ je $n = 513$. Naj bo sedaj $p > 5$. Zapišimo n kot $n = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+9$. Ker je $(p-2), (p-1), p, (p+1), (p+2)$ pet zaporednih števil, je vsaj eno deljivo s 5. Če je $p > 5$, število p ni deljivo s 5, zato je s 5 deljivo eno izmed števil $(p-2), (p-1), (p+1), (p+2)$, torej je njihov produkt $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ deljiv s 5. Vsaj eno izmed števil $p+1$ oziroma $p+2$ je sodo, zato je produkt deljiv tudi z 2. Torej je število $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ za $p > 5$ deljivo z 10. Tako je število n za $p > 5$ vsaj dvomestno in ima na mestu enic števko 9, zato je vsota števk števila n večja od 9. Najmanjša vsota števk je tako pri $p = 2$ in $p = 5$, ko je enaka 9.

Izračun n **pri** $p = 2$**,** $p = 3$ **in** $p = 5$ .... **1 točka**
Ugotovitev, da je vsota števk 9 **pri** $p = 2$ **in** $p = 5$ .... **po 1 točka**
Sklep, da je $(p^2-4)(p^2-1)$ **pri** $p > 5$ **deljivo s** 5 .... **1 točka**
Ugotovitev, da je pri $p > 5$ **zadnja števka** n **enaka** 9 **in je zato vsota števk števila** n **vsaj** 10 .... **2 točki**
Sklep, da je najmanjša vsota števk enaka 9 .... **1 točka**

IV/4. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$ in dobimo $f(0) = f(y) + yf(0)$. Torej je f linearna funkcija oblike $f(x) = a - ax$ za neko realno število a. Ta predpis vstavimo v funkcijsko enačbo in dobimo, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $x+a-ax(a-ay) = a-ay+y(a-ax)$, torej

$$x - a^2x + a^2xy = -axy.$$

Če v to enačbo vstavimo $y = 0$, dobimo $x = a^2x$ za vsak x, torej $a^2 = 1$. Ko to upoštevamo v zgornji enakosti, se poenostavi v $xy = -axy$ oziroma $(1+a)xy = 0$, od koder sledi $a = -1$, saj mora enakost veljati za vsaka x in y.

Dobili smo $f(x) = x - 1$. Če ta predpis vstavimo v obe strani prvotne enačbe, dobimo

$$x + f(xf(y)) = x + f(xy - x) = x + xy - x - 1 = xy - 1$$

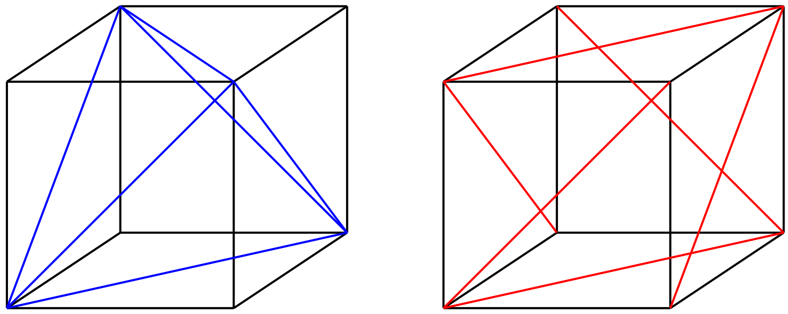
in

$$f(y) + yf(x) = y - 1 + y(x - 1) = xy - 1,$$

kar je enako za vsaka x in y, torej je $f(x) = x - 1$ edina funkcija, ki zadošča dani enačbi.

Vstavljanje $x = 0$ **ali** $y = 0$ **v funkcijsko enačbo** .... **1 točka**
Vstavljanje predpisa $f(x) = a - ax$ **v prvotno enačbo za** x **in** y **(lahko tudi zapisano kot** $f(x) = f(0) - xf(0)$**)** .... **1 točka**
Sklep, da za vsaka x **in** y **velja enačba** $x - a^2x + a^2xy = -axy$ **(oziroma ekvivalentna, lahko zapisana z** $f(0)$ **namesto** a**)** .... **1 točka**
Ugotovitev, da mora biti $a^2 = 1$ .... **1 točka**
Sklep $a = -1$ .... **1 točka**
Preverjanje, da $f(x) = x - 1$ **zadošča prvotni enačbi** .... **1 točka**
Sklep, da je $f(x) = x - 1$ **rešitev** .... **1 točka**

IV/5. Na prvi sliki je $N = 12$, na drugi pa $N = 4$. Dokažimo, da sta to največja in najmanjša možna vrednost N.



Vseh oglišč kocke je 8. Vseh narisanih diagonal je 6 in zato je vseh krajišč diagonal 12. Iz nekega oglišča kocke lahko izhajajo 0, 1, 2 ali 3 diagonale. Torej nam vsako oglišče kocke prinese 0, 0, 1 ali 3 različne pare dotikajočih se diagonal.

Denimo, da lahko dosežemo $N \leq 3$. Če iz nekega oglišča izhajajo 3 diagonale, lahko iz ostalih oglišč izhaja kvečjemu ena diagonala. To bi pomenilo, da je krajišč diagonal kvečjemu $1 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 10$, to pa ni možno. Torej se v nobenem oglišču ne stikajo tri diagonale in imamo lahko kvečjemu 3 oglišča, v katerih se stikata po dve diagonali. Iz vsakega ostalega oglišča potem izhaja kvečjemu ena diagonala. Tako je vseh krajišč diagonal kvečjemu $3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$. To pa je protislovje. Torej je pri vsaki izbiri dopustnih diagonal $N \geq 4$.

Vseh različnih parov diagonal je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Diagonali, ki ležita na nasprotnih ploskvah kocke, se ne moreta stikati. Zato obstaja kvečjemu $15 - 3 = 12$ različnih parov stikajočih se diagonal. Torej je pri vsaki izbiri dopustnih diagonal $N \leq 12$.

Slika ali zapis diagonal s koordinatami za $N = 4$ **. . . . . 1 točka**
Slika ali zapis diagonal s koordinatami za $N = 12$ **. . . . . 1 točka**
Ugotovitev, da iz vsakega oglišča lahko izhajajo od 0 **do** 3 **diagonale in da to pomeni** $0, 1$ **ali** 3 **pare . . . . 1 točka**
Sklep, da ni mogoče doseči $N \leq 3$ **. . . . . 2 točki**
Sklep, da ni mogoče doseči $N \geq 13$ **. . . . . 2 točki**