Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

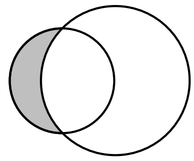
Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE
7. april 2001

NALOGE ZA PRVI LETNIK

1. Označimo z d največji skupni delitelj in z v najmanjši skupni večkratnik naravnih števil m in n. Dokaži: če velja $3m + n = 3v + d$, je število m deljivo z n.

2. Poišči vsa cela števila x in y, ki zadoščajo enačbi $x^2 + xy + y^2 = 1$.



3. Dana je krožnica s polmerom $\sqrt{2}$. Krožnica s polmerom 2 ima središče na tej krožnici. Kolikšna je ploščina osenčenega lika?

4. Jure je želel pripraviti darila za devet prijateljev. Vsakemu prijatelju bo dal po dve čokoladi. V trgovini je videl, da lešnikova čokolada stane 6 tolarjev več kot mlečna čokolada in da vsaka stane celo število tolarjev. Sklenil je, da bo porabil 822 tolarjev tako, da bo čim več prijateljem dal po dve različni čokoladi. Kolikšna je bila cena mlečne čokolade?

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE
7. april 2001

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

1. Poišči vsa cela števila x in y, ki zadoščajo enačbi $|x^2 + 2xy - 3y^2| = 1$.

2. Naj bodo a, b, c in d poljubna pozitivna realna števila. Ali so lahko vsi produkti $4a(1-b)$, $4b(1-c)$, $4c(1-d)$ in $4d(1-a)$ večji od 1?

3. Dan je konveksni štirikotnik, katerega diagonali se sekata pravokotno. Dokaži, da tvorijo pravokotne projekcije presečišča diagonal na stranice danega štirikotnika tetivni štirikotnik.

4. V računu seštevanja različne črke predstavljajo različne števke. V vsoti (ki je zapisana z besedo $NINA$) so vse števke lihe. Koliko je najmanjša možna vrednost vsote?

$$\begin{array}{cccccc} & R & E & P & O \\ + & R & I & B & A \\ \hline & N & I & N & A \end{array}$$

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE
7. april 2001

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

1. Reši enačbo $(2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3$.

2. Poišči najmanjše tako naravno število m, da je $28m + 13 = pd$ in $m - 71 = qd$, kjer so p, q in d naravna števila, $q \neq 1$ in $d > 3$.

3. V trikotniku s koti α, β in γ sta α in β ostra kota ter velja $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma$. Dokaži, da je γ pravi kot.

4. Miha se je preizkušal v zapisovanju raznih števil le s pomočjo števke 1 in znaka za seštevanje. Tako je npr. ugotovil, da obstajata le dve naravni števili n (13 in 4), za kateri velja, da lahko število 13 zapišemo z uporabo n enic in znaka za seštevanje, saj lahko število 13 zapišemo kot vsoto trinajstih enic ali pa $11 + 1 + 1$, ko uporabimo štiri enice.
   Koliko je različnih naravnih števil n, za katere velja, da z uporabo n enic in znaka za seštevanje zapišemo število 125?

IZBIRNO TEKMOVANJE IZ MATEMATIKE
7. april 2001

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

1. Poišči vsa praštevila oblike $101010\ldots101$.

2. Naj bodo a_1, a_2, a_3, a_4 in a_5 različna realna števila. Označimo z m število različnih števil oblike $a_i + a_j$, kjer je $1 \leq i < j \leq 5$. Kolikšna je najmanjša možna vrednost števila m?

3. Naj bo ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom pri B. Na stranici BC ležita taki točki D in E, da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$ in $|EC| = 2|BD|$. Določi kote trikotnika ABC.

4. Kolikšno je največje možno število presečišč tetiv, določenih z osmimi točkami na krožnici, če presečišč na krožnici ne štejemo?

Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Pri vrednotenju vsake naloge smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

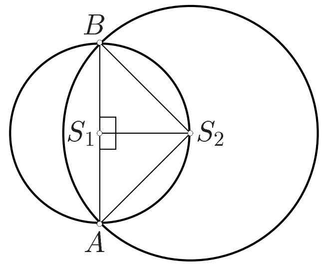
I/1. Ker je $d \geq 1$ največji skupni delitelj števil m in n, lahko zapišemo $m = m'd$ in $n = n'd$. Ko to vstavimo v enačbo, dobimo $3m'd + n'd = 3m'n'd + d$ oz. $(3m' - 1)(n' - 1) = 0$. Ker sta števili m' in n' celi, je edina rešitev $n' = 1$, torej $n = d$ in n res deli m.

Razcep $m = m'd$ in $n = n'd$: 2 točki. Enačba $(3m' - 1)(n' - 1) = 0$: 3 točke. Edina rešitev $n' = 1$: 1 točka. Sklep $n = d$ in zato $n \mid m$: 1 točka.

I/2. Enačbo pomnožimo z 2 in preoblikujemo v $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2$. Ker sta števili x in y celi, sta tako dva člena enaka 1, eden pa mora biti 0, kar nam da vse rešitve $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0), (1, -1), (0, 1), (0, -1), (-1, 1)\}$.

Preoblikovana enačba $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2$: 3 točke. Sklep "dva člena sta enaka 1, tretji pa 0": 1 točka. Vsak par pravilnih rešitev glede na eno izmed treh možnosti: 1 točka. Če tekmovalec navede vse pravilne rešitve in ne dokaže, da ni drugih: 2 točki. Za vsaj 3 pravilne rešitve: 1 točka.

I/3. Če sta S_1 in S_2 središči krožnic, njuni presečišči pa A in B, je $|S_1S_2| = |S_1A| = |S_1B| = \sqrt{2}$ in $|S_2A| = |S_2B| = 2$. Trikotnika AS_2S_1 in S_2BS_1 sta enakokraka in pravokotna s pravima kotoma pri točki S_1, ki leži na daljici AB. Trikotnik AS_2B je pravokoten s pravim kotom pri S_2. Iskana ploščina lika je torej enaka razliki med polovico ploščine kroga s polmerom $\sqrt{2}$ in ploščino odseka, ki ga od kroga s polmerom 2 odreže tetiva AB. Ploščina tega odseka pa je enaka razliki med četrtino ploščine kroga s polmerom 2 in ploščino pravokotnega trikotnika AS_2B. Tako je: $S = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{2 \cdot 2}{2}) = 2$.



Trikotnik AS_2S_1 (ali S_2BS_1) je enakokrak pravokoten: 1 točka. Trikotnik AS_2B je enakokrak pravokoten: 1 točka. Sklep "Iskana ploščina je ploščina polovice kroga minus ploščina odseka": 2 točki. Ploščina odseka: 2 točki. Izračun $S = 2$: 1 točka.

I/4. Recimo, da je Jure kupil k mlečnih čokolad in da je bila cena mlečne čokolade c tolarjev. Tedaj je $kc + (18 - k)(c + 6) = 822$, od koder dobimo $3c = 119 + k$. Ker bi Jure rad dal čim več prijateljem po dve različni čokoladi, moramo poiskati tako rešitev, da bo k čim bližje številu 9, hkrati pa mora biti $119 + k$ deljivo s 3. Tako pridemo do $k = 10$ in $c = 43$. Mlečna čokolada je stala 43 tolarjev.

Vpeljava dveh neznank za ceno in količino (lešnikovih ali mlečnih) čokolad: 1 točka. Enačba $kc + (18 - k)(c + 6) = 822$: 2 točki. Poenostavitev $3c = 119 + k$: 1 točka. Sklep: "Iščemo k, ki bo čim bližje 9": 2 točki. Rešitev $k = 10$ in $c = 43$: 1 točka.

II/1. Ker je $x^2 + 2xy - 3y^2 = (x + y)^2 - 4y^2 = (x - y)(x + 3y)$, moramo obravnavati štiri možnosti. Pri $x - y = 1$ in $x + 3y = 1$ dobimo rešitev $x = 1$, $y = 0$. Pri $x - y = -1$ in

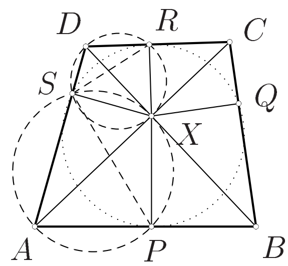
$x+3y=-1$ dobimo rešitev $x=-1$, $y=0$. Pri $x-y=1$ in $x+3y=-1$ dobimo rešitev $x=1/2$, $y=-1/2$, a števili nista celi. Pri $x-y=-1$ in $x+3y=1$ dobimo rešitev $x=-1/2$, $y=1/2$, a števili prav tako nista celi. Enačba ima torej rešitvi $x=1$ in $y=0$ ter $x=-1$ in $y=0$.

Razcep: $x^2+2xy-3y^2=(x-y)(x+3y)$: 3 točke. Analiza vsakega izmed 4 primerov: vsak primer 1 točka. Če tekmovalec samo zapiše kakšno rešitev, a ne dokaže enoličnosti: po 1 točko za vsako rešitev.

II/2. S protislovjem bomo dokazali, da vsi produkti ne morejo biti večji od 1. Recimo, da so. Potem bi veljalo $4a(1-a)4b(1-b)4c(1-c)4d(1-d)>1$, kar pa ni možno, saj za vsako realno število x velja $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$. (Res: $x(1-x)\leq\frac{1}{4} \iff -(x-\frac{1}{2})^2\leq 0$.)

Neenakost $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ z dokazom ali sklicevanjem na neenakost med aritmetično in geometrično sredino: 3 točke. Sklep s protislovjem: 4 točke.

II/3. Privzemimo oznake s slike. Ker je $XP\perp AP$ in $XS\perp AS$, je štirikotnik $APXS$ tetiven. Podobno je tudi štirikotnik $SXRD$ tetiven. Zato je



$$\angle SPA+\angle DRS=\angle SXA+\angle DXS=\tfrac{\pi}{2}.$$

Enako ugotovimo, da je $\angle QPB+\angle QRC=\frac{\pi}{2}$. Sledi $\angle SPQ+\angle SRQ=2\pi-(\angle SPA+\angle DRS)+(\angle QPB+\angle QRC)=\pi$.

Tetivnost štirikotnika $APXS$ (ali ekvivalenten sklep): 2 točki. Ugotovitev $\angle SPA+\angle DRS=\frac{\pi}{2}$: 2 točki. Sklep: $\angle SPQ+\angle SRQ=\pi$: 3 točke. Pri drugačnem reševanju, ki pa ne pripelje do rešitve: vsaka pravilna enakost s koti ali dokazana konckličnost: 1 točka, vendar skupaj največ 3 točke.

II/4. Ker je $O+A=A$, je $O=0$. Zato mora biti $E=9$ in $P+B>10$ ($P+B\neq 10$, ker $N\neq 0$). Tedaj je $N=2R+1$. N je lahko najmanj 3. V tem primeru je $R=1$ in $P+B=13$, kar pomeni, da sta P oziroma B bodisi 7 oziroma 6 bodisi 8 oziroma 5 (v poljubnem vrstnem redu). Toda I in A bi morali biti med seboj različni lihi števki, ki jih pa nimamo več dovolj na voljo. Izberimo zato $N=5$. Tedaj je $R=2$ in $P+B=15$, kar pomeni, da sta števki P in B enaki 7 oziroma 8 (v poljubnem vrstnem redu). Ker iščemo najmanjšo možno vsoto, izberemo $I=1$ in $A=3$, pa imamo rešitev 5153.

Ugotovitve $O=0$, $E=9$, N liho: po 1 točko vsaka od njih. Ovržena možnost $N=3$: 2 točki. Ugotovljena najmanjša vsota 5153 pri možnosti $N=5$: 2 točki (samo 1 točka, če ne določi vseh neznanih števk v enačbi). Če tekmovalec samo ugane rešitev 5153, a ne dokaže minimalnosti: 2 točki.

III/1. Pišimo $a=2^x$ in preoblikujmo dano enačbo. Uporabimo formulo za razcep kubov, pa imamo $(a-4)^3+(a^2-2)^3=(a^2+a-6)(a^4-a^3+a^2-6a+12)$. Nato je $0=(a-4)^3+(a^2-2)^3-(a^2+a-6)^3=(a^2+a-6)(-3a^3+12a^2+6a-24)=-3(a+3)(a-2)(a-4)(a^2-2)=-3(a+3)(a-2)(a-4)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$. Edine pozitivne rešitve so $a=2$, $a=4$ in $a=\sqrt{2}$, ki nam po vrsti dajo $x=1$, $x=2$ in $x=\frac{1}{2}$.

Zamenjava $a=2^x$: 1 točka. Preoblikovanje na enačbo $a^5-3a^4-12a^3+30a^2+20a-48=0$: 1 točka. Razcep v obliki $(a+3)(a-2)(a-4)(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})$: 2 točki. Pozitivne rešitve $a=2$, $a=4$ in $a=\sqrt{2}$: 1 točka. Vse rešitve $x=1$, $x=2$ in $x=\frac{1}{2}$: 2 točki. Če tekmovalec

ugane eno ali dve rešitvi: 1 točka. Če tekmovalec ugane vse tri rešitve in ne dokaže, da ni drugih: 2 točki.

III/2. Iz enačbe $m-71=qd$ izrazimo m in ga vstavimo v enačbo $28m+13=pd$. Dobimo $28qd+2001=pd$, zato $d \mid 2001$. Ker je $2001=1\cdot 3\cdot 23\cdot 29$ in je $d>3$, je $d=23$. Za q moramo vzeti 2, da dobimo najmanjši m. Tako pridemo do $qd=2\cdot 23=m-71$ in je $m=117$.

Eliminiranje m iz sistema in dobljena enačba $28qd+2001=pd$: 2 točki. Sklep $d \mid 2001$: 1 točka. Sklep $d=23$: 1 točka. Sklep "najmanjši m bo pri $q=2$": 2 točki. Sklep $m=117$: 1 točka. Če tekmovalec število m samo ugane: 2 točki.

III/3. Ker je $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$, lahko enakost v nalogi preoblikujemo v $\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\beta)=\sin\beta(\cos\alpha-\sin\beta)$. Ker pa za vsak φ velja $\cos\varphi=\sin(\pi/2-\varphi)$, lahko gornjo enakost preoblikujemo v

$$2\sin\alpha\,\sin\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}\,\cos\tfrac{2\alpha-2\beta+\pi}{4}=-2\sin\beta\,\sin\tfrac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}\,\cos\tfrac{2\beta-2\alpha+\pi}{4}. \tag{1}$$

Ker je $0<2\alpha-2\beta+\pi<2\pi$ in $0<2\beta-2\alpha+\pi<2\pi$, sta v gornji enačbi oba faktorja s kosinusom pozitivna. Ker je $\sin\alpha>0$ in $\sin\beta>0$, mora biti $\sin\frac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}=0$, saj bi sicer v gornji enačbi imeli na eni strani pozitivno vrednost, na drugi pa negativno. Iz $2\alpha+2\beta-\pi=\pi-2\gamma=0$ tako sledi $\gamma=\frac{\pi}{2}$.

Eliminacija enega izmed kotov (npr. γ): 1 točka. Preoblikovanje v enačbo (??): 3 točke. Sklep $\sin\frac{2\alpha+2\beta-\pi}{4}=0$: 2 točki. Sklep $\gamma=\frac{\pi}{2}$: 1 točka. Če tekmovalec ne reši naloge, vendar izraz nekako faktorizira: 3 točke. (Rešitev se zlahka sprevrže v brezizhodno obračanje trigonometričnih izrazov, zato v dobro štejte le tiste korake, ki enačbo poenostavijo oz. faktorizirajo. V tem primeru podelite največ 3 točke.)

III/4. Najprej imamo vsoto 125 enic, nato enajst enic iz vsote nadomestimo s številom 11 in s tem zmanjšamo število enic za devet: imamo 116 enic, od tega dve "vezani" (v številu 11). V naslednjem koraku spet enajst enic iz vsote nadomestimo z 11 in pridemo do 107 enic, od tega štiri "vezane". Postopek lahko nadaljujemo, dokler imamo dovolj "nevezanih" enic. Na vsakem koraku imamo $125-9k$ enic (od tega $2k$ "vezanih"), kjer je $k=0,1,\ldots,11$. Pri $k=11$ imamo 26 enic (od tega 22 "vezanih"), zato postopka ne moremo nadaljevati.
Število 125 pa lahko zapišemo še s pomočjo števila 111. Možnosti sta dve: $111+1+1+\cdots+1$ s 17 enicami in $111+11+1+1+1$ z 8 enicami. Imamo torej 14 različnih naravnih števil n, za katere velja, da z uporabo n enic in znaka za seštevanje zapišemo število 125 (to so 8, 17, 26, 35 ... 116, 125).

Zapis števila 125 s 125 enicami: 1 točka. Zamenjava enajstih enic s številom 11: 1 točka. Zapisanih vseh 12 možnosti brez člena 111: 4 točke. Zapisani obe možnosti s členom 111: 1 točka.

IV/1. Takoj opazimo, da je število deljivo s 101, če se števka 1 pojavi sodo mnogokrat. $1010\ldots101=\sum_{k=0}^{l}10^{2k}$, kjer je l enak število enic minus 1. Če je l lih, imamo zgornji primer. Zato vzemimo, da je l sod. Računajmo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{l}10^{2k} &= \tfrac{100^{l+1}-1}{100-1}=\tfrac{(10^{l+1}-1)(10^{l+1}+1)}{99}=\\ &= \frac{(10-1)(10^l+\ldots 10+1)(10+1)(10^l-\cdots+1)}{99}=\\ &= (10^l+\ldots 10+1)(10^l-\cdots+1),\end{aligned}$$

kjer je vsak faktor posebej večji kot 1 in zato število ni praštevilo. Edino praštevilo take oblike je torej 101.

Sklep "Če je l liho, je vsota deljiva s 101": 2 točki. Edino praštevilo je 101: 1 točka. Faktorizacija $(10^l + \ldots 10 + 1)(10^l - \cdots + 1)$, če je l sodo: 3 točke. Sklep "oba faktorja sta več od 1, zato ne dobimo praštevila": 1 točka.

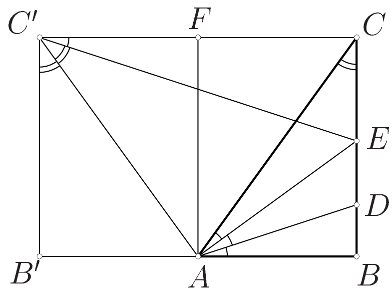
IV/2. Uredimo števila po vrsti: $a_1 < a_2 < \ldots < a_5$. Potem je

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_1 + a_5 < a_2 + a_5 + < a_3 + a_5 < a_4 + a_5.$$

Vsaj 7 števil oblike $a_i + a_j$ za $i < j$ je med seboj različnih. Po drugi strani pa imamo pri $a_i = i$ za $i = 1, 2, 3, 4, 5$ med vsotami $a_i + a_j$ le 7 različnih. Iskano najmanjše število m je torej 7.

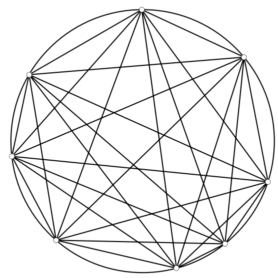
Predpostavka $a_1 < a_2 < \ldots < a_5$: 2 točki. Ocena $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_1 + a_5 < a_2 + a_5 + < a_3 + a_5 < a_4 + a_5$ 3 točke. Dokaz, da je za $a_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, enakost dosežena: 2 točki. Če tekmovalec naloge ne reši v splošnem, iz primera $a_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, pa sklepa, da je iskano število m enako 7: 2 točki.

IV/3. Označimo $\alpha = \angle BAC$. Trikotnik ABC dopolnimo do pravokotnika $ABCF$, nato pa daljico BC prezrcalimo čez daljico AF v daljico $B'C'$. Zaradi $|EC| = 2|BD|$ je $\angle EC'C = \angle BAD = \alpha/3 = \angle CAE$. Štirikotnik $AECC'$ je tako tetiven in zato $\angle ACE = \angle AC'E = \pi/2 - \alpha$. Torej je $2(\pi/2 - \alpha) + \alpha/3 = \angle B'C'C = \pi/2$. Sledi $\angle BAC = \alpha = 3\pi/10$ in $\angle ACB = \pi/5$.



Vpeljava pravokotnikov $ABCF$ in $B'BCC'$: po 1 točko vsak. Tetivnost štirikotnika $AECC'$: 2 točki. Enakost $2(\pi/2 - \alpha) + \alpha/3 = \pi/2$: 2 točki. Sklep $\alpha = 3\pi/10$ in $\angle ACB = \pi/5$: 1 točka. Če se tekmovalec naloge loti s trigonometrijo, vendar je ne reši v celoti: izpeljava pravilne in rešljive enačbe za <u>en</u> neznani kot: 4 točke; če ne izpelje nobene primerne enačbe za kote: vsaka pravilna ugotovitev: 1 točka, vendar skupaj največ 3 točke.

IV/4. Da bomo dobili maksimalno število presečišč, moramo točke na krožnici izbrati tako, da se v vsakem presečišču sekata natanko dve tetivi. Izberimo eno od teh osmih točk. Če to točko povežemo z eno od ostalih sedmih, je na eni strani tetive m točk, na drugi strani pa $6 - m$ točk. Sledi, da je vseh presečišč s tetivami, ki se začnejo v izbrani točki $5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 35$. Vseh točk je 8, ker pa je vsako presečišče določeno s štirimi točkami, je maksimalno število presečišč enako $\frac{8 \cdot 35}{4} = 70$. Slika na desni kaže, da lahko to število tudi zares dosežemo.



Kombinatoren razmislek: 3 točke. Račun: 2 točki. Primer (ali prepričljiva utemeljitev), da je maksimalno število res doseženo: 2 točki.