**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

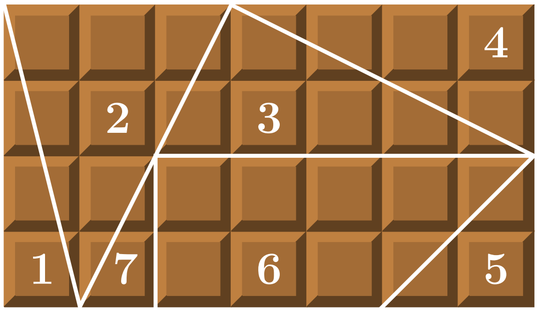
Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Bratje Jure, Klemen, Luka, Miha in Nace so kupili čokolado. Ko so jo odvili, so ugotovili, da je zlomljena na 7 kosov (glej sliko), zato so si teh 7 kosov med sabo razdelili. Jure je pojedel največji kos čokolade. Klemen in Luka sta pojedla enako količino čokolade, toda Klemen je pojedel 3 kose, Luka pa le 1 kos. Miha je pojedel $\frac{1}{7}$ celotne čokolade. Preostanek čokolade je pojedel Nace. Kateri kos čokolade na sliki je pojedel Nace?

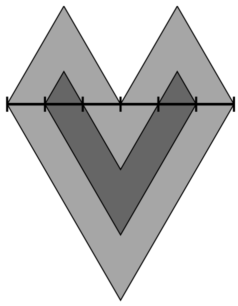


(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

A2. Za realno število a velja $a^2 - \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}$. Koliko je vrednost izraza $a^3 - \frac{1}{2}a$?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 4 **(E)** $\frac{1}{8}$

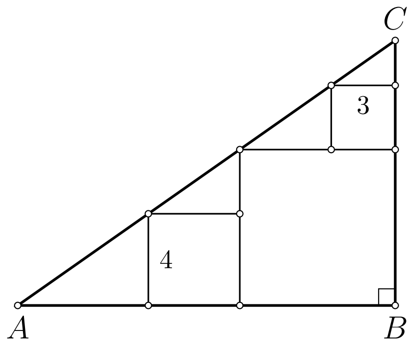
A3. Vodoravna daljica na sliki je razdeljena na 6 enako dolgih delov, vsi trikotniki na sliki pa so enakostranični. Celotna figura na sliki je osenčena z dvema barvama; svetlo sivo in temno sivo. Kolikšen delež ploščine celotne figure je osenčen s temno sivo barvo?



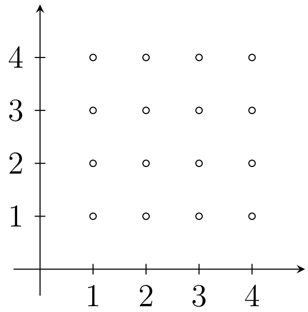
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{9}$ **(C)** $\frac{5}{21}$ **(D)** $\frac{6}{25}$ **(E)** $\frac{7}{27}$

B1. Poišči vsa praštevila p, q in r, ki rešijo enačbo $r^4 = pq + 4$.

B2. V pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri B včrtamo tri kvadrate, kot to prikazuje slika. Stranici manjših dveh kvadratov sta dolgi 3 oziroma 4 enote. Izračunaj dolžino stranice AC trikotnika ABC.



B3. Na celoštevilski mreži je označenih 16 točk (glej sliko). Največ koliko izmed teh točk lahko pobarvamo rdeče, tako da nobene tri rdeče točke ne bodo ležale na isti premici?



62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

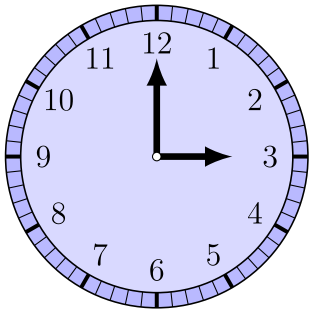
Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Ko ura s kazalcema pokaže 3.00, urni in minutni kazalec oklepata kot $90°$ (glej sliko). Čez koliko minut po 3.00 bosta kazalca na uri spet oklepala kot $90°$?

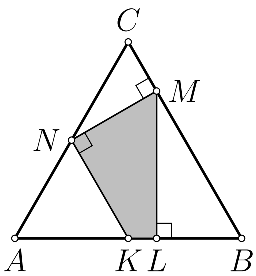


(**A**) $31\frac{7}{11}$ (**B**) $31\frac{8}{13}$ (**C**) $32\frac{8}{11}$ (**D**) $32\frac{9}{13}$ (**E**) $33\frac{6}{11}$

A2. Naj bosta a in b naravni števili, za kateri velja $2^a - 2^b = 240$. Koliko je vrednost izraza $a + b$?

(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 13 (**D**) 16
(**E**) Nič od naštetega.

A3. Ploščina enakostraničnega trikotnika ABC je enaka $32\ \mathrm{cm}^2$. Točka N je središče stranice AC. Premici NM in BC sta pravokotni, premici ML in AB sta pravokotni ter premici KN in NM sta pravokotni (glej sliko). Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina štirikotnika $KLMN$?



(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 16

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\sqrt[3]{x+1}+\frac{6-6\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt[6]{x+1}}=1.$$

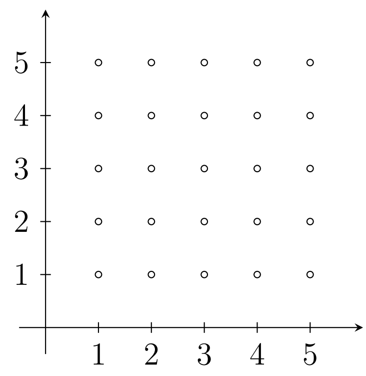
B2. Naj bo AB premer krožnice $\mathcal{K}$, očrtane tetivnemu štirikotniku $ABCD$. Premici AD in BC se sekata v točki E, tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah C in D pa se sekata v točki F. Dokaži, da sta premici EF in AB pravokotni.

B3. Na celoštevilski mreži je označenih 25 točk (glej sliko). Nekatere izmed teh točk želimo pobarvati rdeče, tako da nobene tri rdeče točke ne bodo ležale na isti premici.

(a) Dokaži, da lahko pobarvamo 8 točk.

(b) Dokaži, da ne moremo pobarvati 11 točk.

(c) Ali lahko pobarvamo 9 točk?



62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

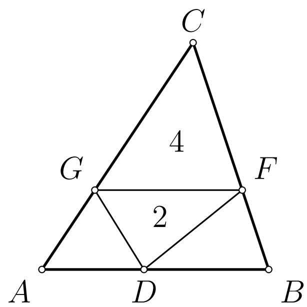
A1. Koliko je takih trimestnih naravnih števil, pri katerih se poljubni dve števki razlikujeta za vsaj 4?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 21

A2. Če polinom $p(x)$ delimo s polinomom $x-18$, je ostanek pri deljenju enak 20. Če polinom $p(x)$ delimo s polinomom $x-20$, je ostanek pri deljenju enak 18. Koliko je ostanek pri deljenju, če polinom $p(x)$ delimo s polinomom $(x-20)(x-18)$?

(**A**) 2018 (**B**) $-x-2$ (**C**) $x+2$ (**D**) $-x+38$ (**E**) $x+38$

A3. Na stranicah AB, BC in CA trikotnika ABC zaporedoma ležijo točke D, F in G, tako da sta premici FG in AB vzporedni (glej sliko). Ploščini trikotnikov GFC in GFD sta zaporedoma enaki 4 cm^2 in 2 cm^2. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina trikotnika ABC?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 16

(**E**) Nemogoče je določiti.

B1. Poišči vsa praštevila p, q in r, za katera ima polinom $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r^2$ same racionalne ničle.

B2. V trikotniku ABC velja $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{3}$ in $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC| \cdot |BC|$. Določi velikosti ostalih dveh notranjih kotov trikotnika ABC.

B3. Taja in Lili igrata igro, pri kateri je na mizi postavljenih 10 kroglic, oštevilčenih z naravnimi števili od 1 do 10. V prvi potezi igre Taja izbere naravno število n, nato pa dekleti izmenjaje z mize jemljeta vsaka po eno kroglico, dokler kroglic ne zmanjka. Prvo kroglico z mize vzame Lili, zadnjo pa Taja. Zmaga tista, katere vsota števil na vseh njenih kroglicah je bližja številu n. Katero dekle ima zmagovito strategijo?

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Prilepi nalepko s šifro

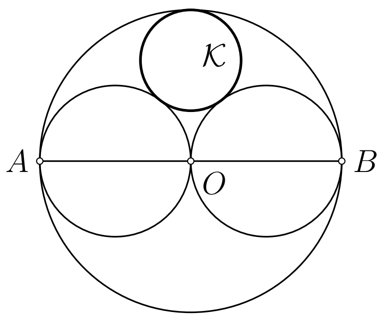
Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: **180 minut**. *Vsaka naloga sklopa A ima natanko en pravilen odgovor. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo preglednico, desno preglednico pusti prazno. Komisija bo pri vrednotenju odgovorov sklopa A upoštevala samo odgovore, zapisane v preglednico.*

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Daljica AB je dolga 20 cm, točka O pa je njeno razpolovišče. Krožnica $\mathcal{K}$ se od zunaj dotika krožnic s premeroma AO in BO ter od znotraj dotika krožnice s premerom AB (glej sliko). Koliko centimetrov je polmer krožnice $\mathcal{K}$?

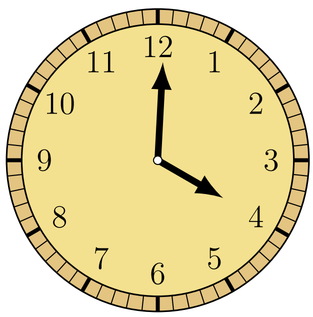


(A) $\frac{5}{2}$ **(B)** $\frac{10}{3}$ **(C)** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\sqrt{5}$ **(E)** $2\sqrt{5}$

A2. Koliko je takih trimestnih naravnih števil, pri katerih se poljubni dve števki razlikujeta za vsaj 3?

(A) 80 **(B)** 88 **(C)** 92 **(D)** 100 **(E)** 648

A3. V nekem trenutku kmalu po 4. uri urni in minutni kazalec na uri oklepata kot $119°$ (glej sliko). Koliko stopinj je velik kot, ki ga kazalca na uri oklepata natanko 1 uro in 20 minut po tem trenutku?



(A) 30 **(B)** 39 **(C)** 41 **(D)** 43 **(E)** 45

B1. Na krožnici s polmerom r naključno izberemo dve točki. Kolikšna je verjetnost dogodka, da sta izbrani točki oddaljeni za več kot $\sqrt{2}r$ in manj kot $\sqrt{3}r$?

B2. Naj bo T težišče trikotnika ABC in D razpolovišče stranice BC. Premice AT, BT in CT naj drugič sekajo trikotniku ABC očrtano krožnico zaporedoma v točkah P, Q in R. Denimo, da je $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|$. Dokaži, da je trikotnik PQR enakokrak.

B3. Jure in Miha igrata igro z dvema posodama s kroglicami, v kateri poteze izvajata izmenično. Na začetku igre je v beli posodi m kroglic, v črni pa n kroglic. V vsaki potezi igralec bodisi odstrani eno kroglico iz ene od posod ali pa prestavi eno kroglico iz bele v črno posodo. Zmaga tisti igralec, ki odstrani zadnjo kroglico iz posod. V odvisnosti od m in n določi, kdo ima zmagovito strategijo, če je prvi na potezi Jure.

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog za 1. letnik

A1	A2	A3
B	E	E

I/A1.

Tablica čokolade ima $4 \cdot 7 = 28$ kvadratnih koščkov. Naj bo en tak košček velik 1 kvadratno enoto. Tedaj je 7 kosov čokolade označenih na sliki po vrsti velikih $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$, $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$, $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$, $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$, $2 \cdot \frac{3+5}{2} = 8$ in $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ kvadratno enoto. Torej je Jure pojedel kos s številko 6, Miha pa kos s številko 4. Izmed preostalih kosov čokolade so kosi s številkami 1, 5 in 7 skupaj veliki $2 + 2 + 1 = 5$ kvadratnih enot, kar je enako kot kos s številko 3. Torej je Klemen pojedel kose s številkami 1, 5 in 7, Luka pa je pojedel kos s številko 3. Ostane le kos s številko 2, ki ga je pojedel Nace.

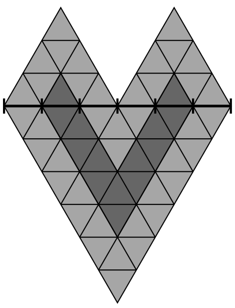
I/A2.

S pomočjo dane enakosti izračunamo

$$a^3 - \frac{1}{2}a = \left(a^3 - \frac{1}{2}a^2\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a\right) - \frac{1}{4}a = a\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) - \frac{1}{4}a =$$
$$= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = \frac{1}{8}.$$

I/A3.

Figuro na sliki razdelimo na majhne skladne enakostranične trikotnike.



S preštevanjem teh enakostraničnih trikotnikov ugotovimo, da je s temno sivo barvo obarvanih $\frac{14}{54} = \frac{7}{27}$ ploščine celotne figure.

I/B1.

Enačbo preoblikujemo v $pq = r^4 - 4$ in desno stran razcepimo po formuli za razliko kvadratov, da dobimo

$$pq = (r^2 - 2)(r^2 + 2).$$

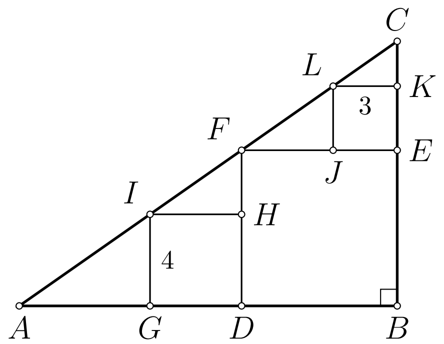
Obe števili $r^2 - 2$ in $r^2 + 2$ sta večji od 1, zato imamo le dve možnosti. Bodisi je $r^2 - 2 = p$ in $r^2 + 2 = q$ ali pa je $r^2 - 2 = q$ in $r^2 + 2 = p$.

Denimo, da velja prva možnost. Če je $r = 3$, tedaj sledi $p = 7$ in $q = 11$. Če pa je $r \neq 3$, tedaj ima število r^2 pri deljenju s 3 ostanek 1, zato je število $q = r^2 + 2$ deljivo s 3. Ker je q praštevilo, sledi $q = 3$ in $r = 1$, kar pa je protislovje, saj 1 ni praštevilo. V tem primeru je torej edina rešitvi $p = 7$, $q = 11$ in $r = 3$.

Drugo možnost, $r^2 - 2 = q$ in $r^2 + 2 = p$, obravnavamo podobno, da dobimo še rešitev $p = 11$, $q = 7$ in $r = 3$.

Razcep enačbe v obliko $pq = (r^2 - 2)(r^2 + 2)$ **. . . . . 1 točka**
Ugotovitev, da je bodisi $r^2 - 2 = p$ **in** $r^2 + 2 = q$ **ali pa je** $r^2 - 2 = q$ **in** $r^2 + 2 = p$. **. . . 1 točka**
Obravnava primera $r = 3$ **ter zapis obeh rešitev. . . . . 2 točki**
Argumentiran sklep, da pri $r \neq 3$ **ni rešitev. . . . . 3 točke**

I/B2.



Označimo oglišča kvadratov, kot prikazuje slika. Trikotniki CKL, LJF, FHI in IGA so podobni trikotniki, zato velja

$$\frac{|CK|}{3} = \frac{3}{|JF|} = \frac{|FH|}{4} = \frac{4}{|AG|}. \tag{1}$$

Označimo dolžino stranice kvadrata $BEFD$ z x. Potem iz enakosti (1) sledi

$$3 \cdot 4 = |FH||JF| = (x-4)(x-3).$$

Ko slednjo enakost poenostavimo in delimo z x, dobimo $x = 7$. Torej je $|FH| = 3$ in $|FJ| = 4$. Iz enakosti (1) zato sledi $|CK| = \frac{3^2}{|JF|} = \frac{9}{4}$ in $|AG| = \frac{4^2}{|FH|} = \frac{16}{3}$. Od tod izračunamo

$$|AB| = |AG| + |GD| + |DB| = \frac{16}{3} + 4 + 7 = \frac{49}{3}$$

in

$$|BC| = |BE| + |EK| + |KC| = 7 + 3 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4},$$

ter naposled še

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{\frac{49^2}{9} + \frac{49^2}{16}} = \sqrt{\frac{49^2(16+9)}{9 \cdot 16}} = \frac{49 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{245}{12}.$$

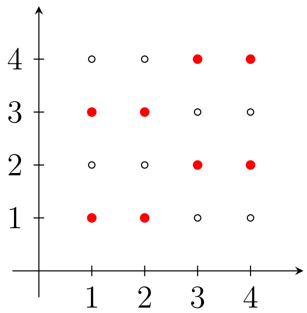
1. NAČIN **Ugotovitev, da so trikotniki** CKL, LJF, FHI **in** IGA **podobni in ugotovitev enakosti** $\frac{|CK|}{3} = \frac{3}{|JF|} = \frac{|FH|}{4} = \frac{4}{|AG|}$ **. . . . . 3 točke**
Ugotovitev, da $x = 7$ **. . . . . 1 točka**
Izračun dolžine daljic $|CK| = \frac{9}{4}$ **in** $frac163$ **. . . . . 1 točka**

Izračun dolžine daljic $|AB| = \frac{49}{3}$ in $|BC| = frac494$ . . . . 1 točka
Izračun dolžine daljice $|AC| = \frac{245}{12}$ . . . . 1 točka

2. NAČIN **Ugotovitev, da sta trikotnika FHI in FJL skladna dotfill 3 točke**
Izračun dolžin daljic $|IF| = |FL| = 5$ . . . . 1 točka
Izračun dolžine daljic $|AI| = \frac{20}{3}$ in $|LC| = \frac{15}{4}$ . . . . 2 točki
Izračun dolžine daljice $|AC| = \frac{245}{12}$ . . . . 1 točka

I/B3.

Ker izmed 4 točk, ki ležijo v isti vodoravni vrstici, lahko pobarvamo največ 2, lahko skupaj pobarvamo največ $4 \cdot 2 = 8$ točk. Da 8 točk tudi res lahko pobarvamo, prikazuje spodnja slika.



Zapisana ugotovitev, da je maksimalno število rdečih točk 8. . . . . 1 točka
Utemeljitev, da je 8 res največje možno število pobarvanih točk. (2 točki za ugotovitev, da na vsaki premici lahko pobarvamo največ dve točki in 1 točka, da upoštevamo npr. vodoravne premice in je torej to $4 \cdot 2 = 8$ točk. . . . . 3 točke
Pobarvana ustrezna rešitev z 8 rdečimi točkami oz. natančno opisano, da je tako barvanje možno. . . . . 3 točke

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog za 2. letnik

A1	A2	A3
C	E	B

II/A1.

Kote bomo merili v smeri urinega kazalca. Ker se veliki kazalec premika hitreje, bosta kazalca spet oklepala kot $90°$ takrat, ko bo veliki kazalec za $90°$ prehitel mali kazalec. Tako je kot α, ki ga v tem času opiše veliki kazalec, za $180°$ večji od kota, ki ga v istem času opiše mali kazalec. Ko se veliki kazalec premakne za cel krog, se mali kazalec premakne za $\frac{1}{12}$ kroga, torej ko se veliki kazalec premakne za kot α, se mali kazalec premakne za kot $\frac{\alpha}{12}$. Od tod sledi $\alpha = \frac{\alpha}{12} + 180°$, od koder izrazimo $\alpha = \frac{12}{11} \cdot 180°$. Ker veliki kazalec v 1 minuti opiše kot $\frac{360°}{60} = 6°$, bo kot α opisal v $\frac{\alpha}{6°} = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ minutah.

II/A2.

Očitno mora biti $a > b$. Enačbo preoblikujemo do $2^b(2^{a-b} - 1) = 2^4 \cdot 15$. Od tod sledi $b = 4$ in $2^{a-b} - 1 = 15$. Drugo enačbo preuredimo do $2^{a-b} = 16$ in sklepamo, da je $a - b = 4$. Od tod izračunamo še $a = 8$. Torej je $a + b = 12$ in pravilen odgovor je (**E**).

II/A3.

Označimo dolžino stranice enakostraničnega trikotnika ABC z a. Opazimo, da sta trikotnika NMC in MLB polovici enakostraničnih trikotnikov. Ker je N razpolovišče stranice, od tod po vrsti sledi $|NC| = \frac{a}{2}$, $|MC| = \frac{a}{4}$, $|BM| = \frac{3a}{4}$. Ker je $\sphericalangle ANK = 180° - \sphericalangle KNM - \sphericalangle MNC = 60°$, je trikotnik AKN enakokrak. Njegova stranica je enaka $\frac{1}{2}$ stranice trikotnika ABC, zato je njegova ploščina enak $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ploščine trikotnika ABC, to je 8 cm^2. Podobno ugotovimo, da je ploščina trikotnika NMC enaka $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ ploščine trikotnika ABC, to je 4 cm^2, ploščina trikotnika MLB pa je enaka $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}$ ploščine trikotnika ABC, to je 9 cm^2. Ploščina štirikotnika $KLMN$ je tako enaka $32-8-4-9 = 11$ cm^2.

II/B1.

V enačbo vpeljemo novo spremenljivko $z = \sqrt[6]{x+1}$, da dobimo $z^2 + \frac{6-6z^2}{z^3-z} = 1$, in ulomek na levi strani preoblikujemo $z^2 + \frac{-6(z^2-1)}{z(z^2-1)} = 1$. Od tod sklepamo, da z ne sme biti enak 0, 1 ali -1, saj sicer ulomek ne bi bil definiran, nato pa lahko ulomek okrajšamo, da dobimo enačbo $z^2 - \frac{6}{z} = 1$. Enačbo pomnožimo z z in poenostavimo do $z^3 - z - 6 = 0$. Izraz na levi strani enačbe razstavimo

$$z^3 - z - 6 = (z^3 - 8) - (z - 2) = (z - 2)(z^2 + 2z + 4) - (z - 2) = (z - 2)(z^2 + 2z + 3).$$

Ker je $z^2 + 2z + 3 = (z + 1)^2 + 2 > 0$, je edina rešitev enačbe $z = 2$. Sledi $\sqrt[6]{x+1} = 2$, od koder izračunamo $x = 63$.

2. način. Kot v prvi rešitvi vpeljemo novo spremenljivko $z = \sqrt[6]{x+1}$, nato pa dobljeno enačbo $z^2 + \frac{6-6z^2}{z^3-z} = 1$ pomnožimo z $z^3 - z$ in preoblikujemo do $z^5 - 2z^3 - 6z^2 + z + 6 = 0$.

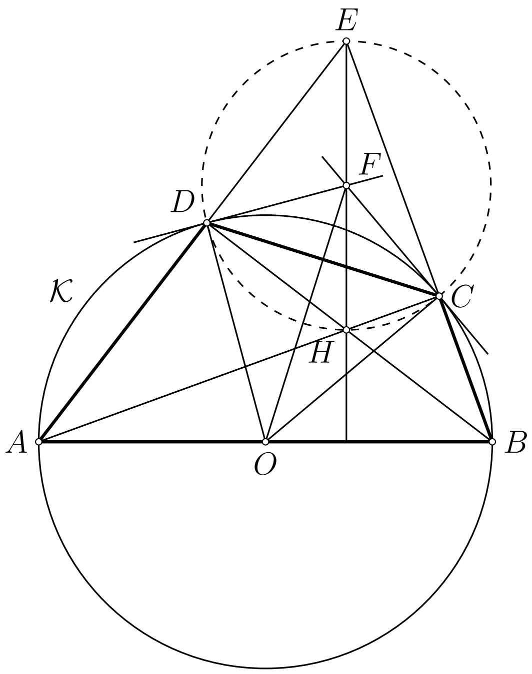
Nekoliko bolj se moramo potruditi, da levo stran podobno kot v prvi rešitvi razstavimo

$$\begin{aligned} z^5-2z^3-6z^2+z+6 &= z(z^4-2z^2+1)-6(z^2-1) = z(z^2-1)^2-6(z^2-1) = \\ &= (z^2-1)(z^3-z-6) = (z-1)(z+1)(z-2)(z^2+2z+3). \end{aligned}$$

Rešitve enačbe so tako $z=1$, $z=-1$ in $z=2$, saj je spet $z^2+2z+3>0$. Prvi dve rešitvi odpadeta, ker v tem primeru ulomek v začetni enačbi za z ni definiran, rešitev $z=2$ pa nam da $x=63$.

Vpeljava nove spremenljivke $z=\sqrt[6]{x+1}$ **.............................. 1 točka**
Ugotovitev, da z **ne sme biti enak** 0, 1 **in** -1 **oz.** x **ne sme biti** 0 **in** -1 **...... 1 točka**
Preoblikovanje enačbe do $z^3-z-6=0$ **.............................. 1 točka**
Razčlenitev enačbe v obliko $(z-2)(z^2+2z+3)=0$ **ali** $(z-1)z(z+1)=6$ **ali** $(z^2-1)(z-2)(z^2+2z+3)=0$ **.............................. 1 točka**
Preizkus, da rešitev $z=2$ **ustreza enačbi .... 1 točka**
Utemeljitev, da je $z=2$ **edina realna rešitev .... 1 točka**
Rezultat $x=63$ **.............................. 1 točka**

II/B2.



Označimo $\alpha=\sphericalangle BAE$ in $\beta=\sphericalangle EBA$, in naj bo O središče krožnice $\mathcal{K}$. Potem je $\sphericalangle AEB=\pi-\alpha-\beta$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $ABCD$ je $\sphericalangle DCB=\pi-\alpha$ in $\sphericalangle ADC=\pi-\beta$. Ker je $\sphericalangle OCB=\sphericalangle CBO=\beta$ in $\sphericalangle ADO=\sphericalangle OAD=\alpha$, sledi $\sphericalangle ODC=\sphericalangle DCO=\pi-\alpha-\beta$.

Naj bo S središče trikotniku CED očrtane krožnice. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je $\sphericalangle DSC=2\sphericalangle DEC=2(\pi-\alpha-\beta)$, zato je $\sphericalangle CDS=\sphericalangle SCD=\frac{\pi-\sphericalangle DSC}{2}=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$. Sledi $\sphericalangle ODS=\sphericalangle SCO=\sphericalangle SCD+\sphericalangle DCO=\frac{\pi}{2}$. Torej sta CS in DS tangenti na krožnico $\mathcal{K}$, kar pomeni, da je $S=F$, oziroma F je središče trikotniku CED očrtane krožnice.

Naj bo H višinska točka trikotnika ABE. Po Talesovem izreku sta AC in BD višini tega trikotnika, torej je H njuno presečišče. Prav tako po Talesovem izreku sledi, da je štirikotnik $CEDH$ tetiven in središče njemu očrtane krožnice leži na razpolovišču daljice EH. Pokazali smo že, da je točka F središče trikotniku CED očrtane krožnice, torej točke E, F in H

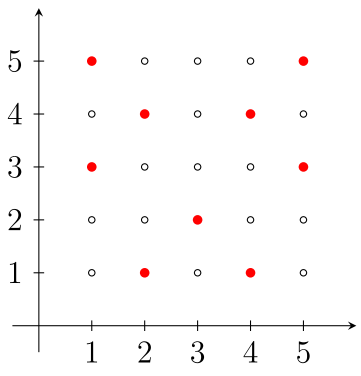
ležijo na isti premici. Ker je EH višina trikotnika ABE na stranico AB, od tod sledi, da sta premici EF in AB pravokotni.

2. način. Privzemimo enake oznake kot v prvi rešitvi. Ker sta CF in DF tangenti na krožnico $\mathcal{K}$, je trikotnik DCF enakokrak z vrhom pri F, hkrati pa velja $\sphericalangle FCO = \sphericalangle ODF = \frac{\pi}{2}$. Iz štirikotnika $OCFD$ zato dobimo $\sphericalangle DFC = \pi - \sphericalangle COD$. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je $\sphericalangle COD = 2\sphericalangle CAD$, torej je $\sphericalangle DFC = \pi - 2\sphericalangle CAD$. Po Talesovem izreku velja $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$, zato je $\sphericalangle DEC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CAD$. Od tod sledi $\sphericalangle DFC = \pi - 2\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle DEC$. Ker točki E in F ležita na istem bregu premice CD in je trikotnik CFD enakokrak z vrhom pri F, po izreku o središčnem in obodnem kotu sledi, da je F središče trikotniku CED očrtane krožnice. Dokaz dokončamo podobno kot v prvi rešitvi.

Pravilna uporaba tetivnosti štirikotnika $ABCD$, npr. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ECD$ ali $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD$ .... 1 točka
Izračun kotov trikotnika OCD s koti trikotnika ABE, npr. $\sphericalangle ODC = \sphericalangle DCO = \pi - \alpha - \beta$ .... 1 točka
Uvedba točke S ali izračun kotov trikotnika CDF s koti štirikotnika $ABCD$, npr. $\sphericalangle CDF = \sphericalangle FCD = \sphericalangle CAD$ ali $\sphericalangle DFC = \pi - \sphericalangle COD$ .... 1 točka
Dokaz $\sphericalangle DFC = 2\sphericalangle DEC$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je F središče trikotniku CDE očrtane krožnice .... 1 točka
Tetivnost štirikotnika $CEDH$ ali prenos kotov ob točkah E in F npr. $\sphericalangle FEC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CDE$ .... 1 točka
Utemeljitev, da je $AB \perp EF$ .... 1 točka

II/B3.

Spodnja slika prikazuje, da lahko pobarvamo ne le 8 ampak tudi 9 točk.



Ker izmed 5 točk, ki ležijo v isti vodoravni vrstici, lahko pobarvamo največ 2, lahko skupaj pobarvamo največ $5 \cdot 2 = 10$ točk. Torej 11 točk ne moremo pobarvati.

Opomba. Izkaže se, da lahko pobarvamo celo 10 točk, vendar je tako barvanje veliko težje najti kot barvanje za 9 točk. Bralcu prepuščamo, da primer najde sam.

Pravilno barvanje osmih točk v mreži .... 1 točka
Sklep, da sta v vsaki vrstici (stolpcu) pobarvani največ 2 točki .... 1 točka
Sklep, da ker imamo samo 5 vrstic oziroma stolpcev, 11 točk ne moremo pobarvati 2 točki
Pravilno barvanje devetih točk v mreži .... 3 točke
Samo pritrdilen odgovor na podnalogo $c)$ prinese 0 točk.

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog za 3. letnik

A1	A2	A3
C	D	B

III/A1.

Obravnavajmo vse možnosti glede na prvo števko števila.

Če je prva števka števila enaka 1, tedaj moramo drugo in tretjo števko izbrati iz množice $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Imamo le dve možnosti, 59 in 95. Podobno, če je prva števka enaka 8, morata biti preostali dve iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Spet imamo le dve možnosti, 04 in 40.

Če je prva števka enaka 2, morata biti preostali dve iz množice $\{6, 7, 8, 9\}$, vendar se nobeni dve števili iz te množice ne razlikujeta za vsaj 4. Podobno ugotovimo, da prva števka ne more biti enaka 7 in tudi ne 3 ali 6.

Če je prva števka enaka 4, tedaj sta preostali dve lahko enaki 08, 80, 09 ali 90. Če je prva števka enaka 5, tedaj sta preostali dve lahko enaki 09, 90, 19 ali 91.

Če pa je prva števka enaka 9, moramo preostali dve izbrati iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, kar lahko storimo na 6 načinov, tj. $04, 40, 05, 50, 15, 51$.

Števil z iskano lastnostjo je torej $4 + 8 + 6 = 18$.

III/A2.

Iz podatkov sklepamo, da je $p(x) = (x - 18)r(x) + 20$ za nek polinom $r(x)$. Od tod sledi $p(18) = 20$. Podobno sklepamo, da je $p(20) = 18$. Naj bo $s(x)$ ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $(x - 20)(x - 18)$. Tedaj je $p(x) = (x - 20)(x - 18)t(x) + s(x)$ za nek polinom $t(x)$ in $s(x) = ax + b$ za neki realni števili a in b. Ker je $p(18) = 20$ in $p(20) = 18$, je tudi $s(20) = 18$ in $s(18) = 20$. Od tod sledi $20a + b = 18$ in $18a + b = 20$, od koder izračunamo $a = -1$ in $b = 38$. Torej je $s(x) = -x + 38$.

III/A3.

Trikotnika GFC in GDF imata enako osnovnico GF, njuni ploščini pa sta v razmerju $2 : 1$. Torej morata biti tudi dolžini njunih višin na stranico GF v razmerju $2 : 1$. Ker sta premici FG in AB vzporedni, je dolžina višine skozi C trikotnika ABC enaka vsoti dolžin prej omenjenih višin. Od tod sledi, da sta višini skozi C trikotnikov ABC in GFC v razmerju $3 : 2$. Ker sta si ta dva trikotnika podobna, je tudi $|AB| : |GF| = 3 : 2$. Ploščini trikotnikov ABC in GFC sta tako v razmerju $9 : 4$, zato je ploščina trikotnika ABC enaka $9\ \mathrm{cm}^2$.

III/B1.

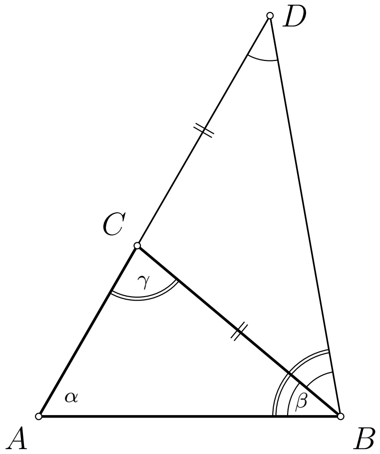
Ker ima polinom f celoštevilske koeficiente in vodilni koeficient enak 1, so vse njegove racionalne ničle v resnici celoštevilske. Če je x negativno število, potem je tudi $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r^2$ negativno število, saj so vsi členi v tem primeru negativni. Torej polinom f nima negativnih ničel. Ker tudi 0 ni ničla polinoma f, sledi, da so vse tri njegove ničle naravna števila. Označimo jih z a, b in c.

Po Vietovih formulah je $a + b + c = p$, $ab + ac + bc = q$ in $abc = r^2$. Ker je r praštevilo, iz tretje enačbe sledi, da imamo le dve možnosti; bodisi sta dve ničli enaki r, tretja pa 1, ali pa sta dve ničli enaki 1, tretja pa r^2.

V prvem primeru je $q = ab + ac + bc = r(r+2)$, kar pa ni mogoče, saj $r(r+2)$ ni praštevilo. Torej sta dve ničli enaki 1, tretja pa r^2. Od tod dobimo $p = a + b + c = r^2 + 2$. Če število r ni deljivo s 3, potem je ostanek števila r^2 pri deljenju s 3 enak 1, zato je število $p = r^2 + 2$ deljivo s 3. To ni mogoče, saj je $p = r^2 + 2$ praštevilo, ki je očitno večje kot 3. Sledi, da je $r = 3$, $p = r^2 + 2 = 11$ in $q = ab + ac + bc = 2r^2 + 1 = 19$, ničle polinoma $f(x) = x^3 - 11x^2 + 19x - 9$ pa so 1, 1 in 9.

Utemeljen sklep, da so ničle cela števila .... **1 točka**
Ugotovitev, da $abc = r^2$ **in sklep, da imamo 6 možnosti:** $(1,1,r^2)$, $(1,-1,-r^2)$, $(-1,-1,r^2)$, $(1,r,r)$, $(-1,-r,r)$, $(1,-r,-r)$ .... **1 točka**
Dokaz, da nobena ničla ne more biti negativna ali obravnava primerov $(1,-1,-r^2)$, $(-1,-1,r^2)$, $(-1,-r,r)$, $(1,-r,-r)$ **(če se obravnavata vsaj** 2 **primera se dodeli** 1 **točka)**
2 točka
Obravnava primera $(1,r,r)$ .... **1 točka**
Obravnava primera $(1,1,r^2)$ .... **1 točka**
Zapis rešitve $(r,p,q) = (3,11,19)$ .... **1 točka**

III/B2.



Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ, torej je $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Naj bo D taka točka na premici AC, da C leži med A in D in velja $|CD| = |CB|$. Pogoj naloge lahko preoblikujemo v

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC| + |BC|}{|AB|} = \frac{|AC| + |CD|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|}.$$

Trikotnika ABC in ADB se torej ujemata v razmerju stranic in kotu $\sphericalangle BAD$ med njima, zato sta si podobna. Sledi $\sphericalangle ADB = \beta$ in $\sphericalangle DBA = \gamma$. Ker je trikotnik BCD enakokrak z vrhom v C, je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CDB = \beta$. Torej je

$$\gamma = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBA = 2\beta.$$

Od tod sledi $\pi = \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3} + 3\beta$, zato je $\beta = \frac{2\pi}{9}$ in $\gamma = \frac{4\pi}{9}$.

2. način. Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ. Po sinusnem izreku velja $\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma}$, od koder izrazimo $|BC| = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}|AB|$ in $|AC| = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}|AB|$. Ko to vstavimo v enakost $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC| \cdot |BC|$, dobimo

$$|AB|^2 = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} \cdot |AB|^2 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma} \cdot |AB|^2.$$

Enakost okrajšamo z $|AB|^2$ in pomnožimo s $\sin^2\gamma$, da dobimo enakost $\sin^2\gamma = \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta$, ki jo preuredimo v $\sin^2\gamma - \sin^2\beta = \sin\alpha\sin\beta$. S pomočjo faktorizacijskih formul in formul za dvojne kote levo stran preoblikujemo

$$\sin^2\gamma - \sin^2\beta = (\sin\gamma + \sin\beta)(\sin\gamma - \sin\beta) = 2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} =$$

$$= \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) = \sin(\pi-\alpha)\sin(\gamma-\beta) = \sin\alpha\sin(\gamma-\beta).$$

Torej velja $\sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sin(\gamma-\beta)$. Po predpostavki je $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oziroma $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, zato sledi $\sin\beta = \sin(\gamma-\beta)$. Ker je $0 < \beta < \pi$ in $-\pi < \gamma - \beta < \pi$, imamo le dve možnosti; bodisi je $\gamma - \beta = \beta$ ali pa $\gamma - \beta = \pi - \beta$. V drugem primeru dobimo protislovje $\gamma = \pi$, torej je $\gamma - \beta = \beta$, oziroma $\gamma = 2\beta$. Hkrati je $\gamma + \beta = \pi - \alpha = \frac{2\pi}{3}$, torej je $3\beta = \frac{2\pi}{3}$. Sledi $\beta = \frac{2\pi}{9}$ in $\gamma = \frac{4\pi}{9}$.

3. način. Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ. Po predpostavki je $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC|\cdot|BC|$, po kosinusnem izreku pa velja $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC|\cdot|BC|\cos\gamma$. Iz obeh enakosti sledi $|BC|^2 = |AC|\cdot|BC|(1+2\cos\gamma)$ oziroma

$$|BC| = (1+2\cos\gamma)|AC|.$$

Ko to vstavimo v enakost $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC|\cdot|BC|$, dobimo $|AB|^2 = (2+2\cos\gamma)|AC|^2$ oziroma

$$|AB| = \sqrt{2+2\cos\gamma}\cdot|AC|.$$

Če zapišemo še drugi kosinusni izrek $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB|\cdot|AC|\cos\alpha$, vanj vstavimo zgornji dve zvezi in upoštevamo predpostavko $\alpha = \frac{\pi}{3}$, dobimo

$$(1+2\cos\gamma)^2|AC|^2 = (2+2\cos\gamma)|AC|^2 + |AC|^2 - \sqrt{2+2\cos\gamma}\cdot|AC|^2.$$

Enakost okrajšamo z $|AC|^2$ in izrazimo člen s korenom

$$\begin{aligned}\sqrt{2+2\cos\gamma} &= 3 + 2\cos\gamma - (1+2\cos\gamma)^2 = 2 - 2\cos\gamma - 4\cos\gamma^2 = \\ &= (2+2\cos\gamma)(1-2\cos\gamma).\end{aligned} \tag{2}$$

Enakost sedaj kvadriramo, da dobimo $(2+2\cos\gamma) = (2+2\cos\gamma)^2(1-2\cos\gamma)^2$. Ker $\gamma \neq \pi$, je $2+2\cos\gamma \neq 0$, zato lahko enakost okrajšamo z $(2+2\cos\gamma)$, in desno stran preuredimo

$$\begin{aligned}1 &= (2+2\cos\gamma)(1-2\cos\gamma)^2 = 2 - 6\cos\gamma + 8\cos^3\gamma = 2 + 2(4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma) = \\ &= 2 + 2\cos 3\gamma.\end{aligned}$$

Sledi $\cos 3\gamma = -\frac{1}{2}$. Ker je $\alpha = \frac{\pi}{3}$, je $\gamma \leq \frac{2\pi}{3}$ oziroma $0 < 3\gamma \leq 2\pi$. Zato imamo dve rešitvi, $3\gamma = \frac{2\pi}{3}$ in $3\gamma = \frac{4\pi}{3}$, od koder dobimo $\gamma = \frac{2\pi}{9}$ in $\gamma = \frac{4\pi}{9}$. Ker je $0 < \frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{3}$, je $\frac{1}{2} < \cos\frac{2\pi}{9} < 1$. Torej je pri vrednosti $\gamma = \frac{2\pi}{9}$ desna stran enakosti (2) negativna, leva pa pozitivna, zato ta rešitev odpade. Rešitev $\gamma = \frac{4\pi}{9}$ pa je res rešitev, saj je v tem primeru $\gamma > \frac{\pi}{3}$ in zato $\cos\gamma < \frac{1}{2}$, torej sta obe strani enakosti (2) pozitivni. Od tod izračunamo še $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \frac{2\pi}{9}$.

1. način

Definirana točka D ....1 točka
Ugotovitev, da sta trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle ADB$ podobna ....2 točki

Ugotovitev, da je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ACB$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CDB = \sphericalangle CBA$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CBA$ .... 1 točka
Pravilno izračunani koti trikotnika $\triangle ABC$ .... 1 točka

<u>2. način</u>

Zapisan sinusni izrek za trikotnik $\triangle ABC$ .... 1 točka
Pravilna izpeljava enačbe $\sin^2\gamma = \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta$ .... 1 točka
Pravilna izpeljava enačbe $\sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sin(\gamma-\beta)$ .... 1 točka
Argument $\sin\alpha \neq 0$ in enačba $\sin\beta = \sin(\gamma-\beta)$ .... 1 točka
Relevantni rešitvi $\gamma-\beta = \beta$ in $\gamma-\beta = \pi-\beta$ .... 1 točka
Obravnava rešitev .... 1 točka
Pravilno izračunani koti trikotnika $\triangle ABC$ .... 1 točka

<u>3. način</u>

Pravilna izpeljava enačbe $|BC| = (1+2\cos\gamma)|AC|$ .... 1 točka
Pravilna izpeljava enačbe $|AB| = \sqrt{2+2\cos\gamma}|AC|$ .... 1 točka
Pravilna izpeljava enačbe $\sqrt{2+2\cos\gamma} = (2+2\cos\gamma)(1-2\cos\gamma)$ .... 1 točka
Argument $2+2\cos\gamma \neq 0$ in enačba $2\cos 3\gamma = -1$ .... 1 točka
Relevantni rešitvi $\gamma = 2\pi/9$ in $\gamma = 4\pi/9$ .... 1 točka
Obravnava rešitev .... 1 točka
Pravilno izračunani koti trikotnika $\triangle ABC$ .... 1 točka

III/B3.

Pokazali bomo, da ima zmagovito strategijo Lili. Vsota števil vseh kroglic na mizi je enaka $\frac{10\cdot 11}{2} = 55$. Torej bo na koncu vsota števil ene od deklet večja kot $\frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$, vsota števil druge pa manjša od $27\frac{1}{2}$, hkrati pa bosta obe vsoti od števila $27\frac{1}{2}$ enako oddaljeni. Če Taja v prvi potezi izbere naravno število n, ki je večje od $27\frac{1}{2}$, potem mora Lili le poskrbeti, da bo njena vsota na koncu večja od Tajine, saj bo tedaj večja kot $27\frac{1}{2}$ in s tem bližja številu n. To lahko Lili stori tako, da vsakič z mize vzame kroglico z največjo številko. Če pa Taja v prvi potezi izbere naravno število manjše od $27\frac{1}{2}$, lahko na podoben način zmaga Lili, če z mize vsakič vzame kroglico z najmanjšo številko.

Utemeljitev za $n \leq 10$ in $n \geq 40$ .... 2 točki
Utemeljitev za $n \leq 25$ in $n \geq 30$ .... 1 točka
Utemeljitev meje pri povprečju 27.5 .... 2 točki
Utemeljitev zmagovalne strategije .... 2 točki

Opomba: Pri utemeljitvi zmagovalne strategije zahtevamo utemeljitev zakaj je taka srategija res zmagovalna, ne glede na Tajino igro.

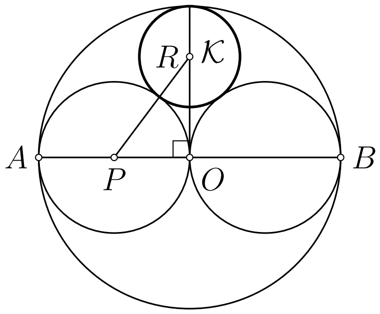
62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Državno tekmovanje, 21. april 2018

Rešitve nalog za 4. letnik

A1	A2	A3
B	D	B

IV/A1.



Označimo razpolovišče daljice AO s P, središče krožnice $\mathcal{K}$ pa z R. Polmer krožnice $\mathcal{K}$ označimo z r. Zaradi simetrije je premica RO pravokotna na premico AB. Torej po Pitagorovem izreku velja $|PO|^2 + |OR|^2 = |PR|^2$. Merjeno v centimetrih je $|PO| = 5$, $|OR| = 10 - r$ in $|PR| = 5 + r$, zato je $5^2 + (10 - r)^2 = (5 + r)^2$. Enačbo poenostavimo, da dobimo $30r = 100$. Torej je $r = \frac{10}{3}$ cm.

IV/A2.

Obravnavajmo vse možnosti glede na prvo števko števila.

Če je prva števka enaka 1, potem moramo drugo in tretjo števko izbrati iz množice šestih zaporednih števil $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tako da se razlikujeta za vsaj 3. To lahko storimo na 12 načinov, tj. $47, 48, 49, 58, 59, 69, 74, 84, 85, 94, 95, 96$. Podobno, če je prva števka enaka 8, moramo drugo in tretjo števko izbrati iz množice šestih zaporednih števil $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. To lahko spet storimo na 12 načinov.

Če je prva števka enaka 2, moramo drugi dve izbrati iz množice petih zaporednih števil $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, kar lahko storimo na 6 načinov. Podobno imamo 6 možnosti tudi, če je prva števka enaka 7.

Če je prva števka enaka 3, moramo drugi dve izbrati iz množice $\{0\} \cup \{6, 7, 8, 9\}$, kar lahko storimo na 10 načinov. Podobno, če je prva števka enaka 6, moramo drugi dve izbrati iz množice $\{9\} \cup \{0, 1, 2, 3\}$, kar spet lahko storimo na 10 načinov.

Če je prva števka enaka 4, moramo drugi dve izbrati iz množice $\{0, 1\} \cup \{7, 8, 9\}$, kar lahko storimo na 12 načinov. Podobno imamo 12 možnosti tudi, če je prva števka enaka 5.

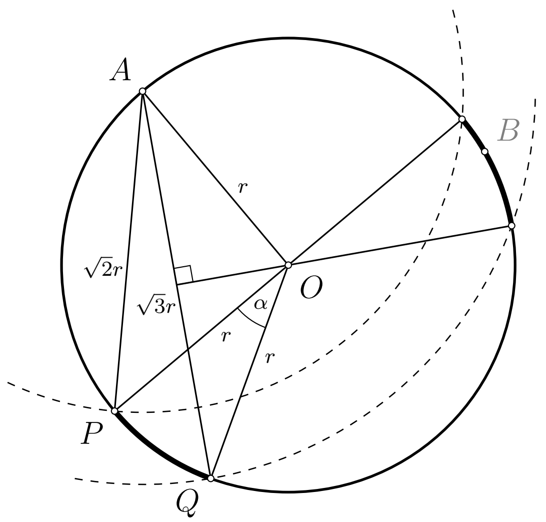
Če pa je prva števka enaka 9, potem moramo preostali dve števki izbrati iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kar lahko storimo na 20 načinov.

Števil z iskano lastnostjo je torej $24 + 12 + 20 + 24 + 20 = 100$.

IV/A3.

Kote bomo merili v smeri urinega kazalca. Veliki kazalec v eni uri opiše kot $360°$, v eni minuti pa kot $\frac{360°}{60} = 6°$. V 1 uri in 20 minutah se torej premakne za kot $20 \cdot 6° = 120°$. Mali kazalec v eni uri opiše kot $\frac{360°}{12} = 30°$, v eni minuti pa kot $\frac{30°}{60} = 0.5°$. V 1 uri in 20 minutah se torej premakne za kot $30° + 20 \cdot 0.5° = 40°$. Kot med kazalcema po 1 uri in 20 minutah je zato enak $119° + 40° - 120° = 39°$.

IV/B1.

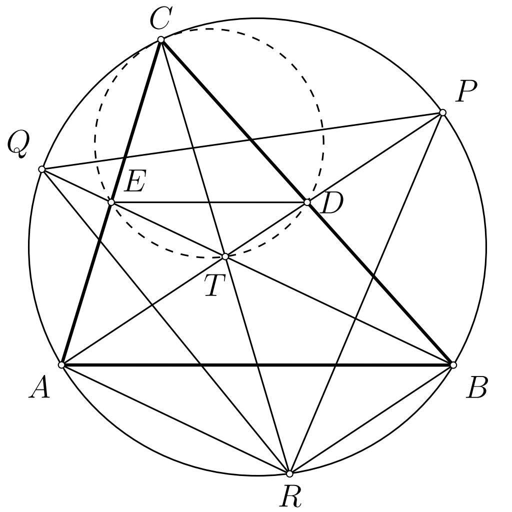


Privzemimo oznake s slike, na kateri je prva izbrana točka na krožnici označena z A. Da bo razdalja med izbranima točkama večja od $\sqrt{2}r$ in manjša od $\sqrt{3}r$, mora druga izbrana točka B ležati na enem od dveh odebeljenih lokov na sliki. Verjetnost tega dogodka je enaka razmerju med skupno dolžino obeh odebeljenih lokov in obsegom cele krožnice. Ker sta odebeljena loka očitno enako dolga, je to razmerje enako $\frac{\alpha r + \alpha r}{2\pi r} = \frac{\alpha}{\pi}$.

Določiti moramo še velikost kota α. Hitro opazimo, da je trikotnik APO polovica kvadrata, saj je enakokrak in ima osnovnico za faktor $\sqrt{2}$ daljšo od obeh krakov. Od tod dobimo $\sphericalangle AOP = \frac{\pi}{2}$. Podobno opazimo, da višina na osnovnico enakokrakega trikotnika AQO ta trikotnik razdeli na dva pravokotna trikotnika, ki sta enaka polovici enakostraničnega trikotnika, saj imata hipotenuzo dolžine r in eno od katet dolžine $\frac{\sqrt{3}}{2}r$. Sledi, da je $\sphericalangle AOQ = \frac{2\pi}{3}$. Od tod izračunamo $\alpha = \sphericalangle AOQ - \sphericalangle AOP = \frac{\pi}{6}$. Verjetnost iskanega dogodka je torej enaka $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{6}$.

Pregledna skica skupaj z označenimi koti .... 1 točka
Izračun kota $\sphericalangle AOQ$ .... 1 točka
Izračun kota $\sphericalangle AOP$ .... 1 točka
Izračun kota α .... 1 točka
Nastavljeno razmerje $\frac{\alpha}{\pi}$ .... 2 točki
Pravilen rezultat .... 1 točka

IV/B2.



Označimo dolžine stranic trikotnika ABC in njegove kote kot običajno. Naj bo E razpolovišče stranice AC. Potem je $|AE| = \frac{b}{2}$, $|AC| = b$ in po predpostavki $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Ker težišče deli težiščnico v razmerju $2:1$, lahko izračunamo še $|AT| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$. Torej je

$$\frac{|AE|}{|AT|} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AD|}{|AC|}.$$

To pa pomeni, da sta si trikotnika ATE in ACD podobna, saj imata skupen kot $\sphericalangle DAC$. Torej je $\sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD$, kar pomeni, da je štirikotnik $CETD$ tetiven. Sledi $\sphericalangle ATR = \sphericalangle DTC = \sphericalangle DEC = \alpha$, kjer smo upoštevali, da sta premici AB in DE vzporedni, saj sta D in E razpolovišči ustreznih stranic. Zaradi tetivnosti štirikotnika $ARBC$ velja $\sphericalangle TRA = \beta$, torej je $\sphericalangle RAT = \pi - \sphericalangle ATR - \sphericalangle TRA = \pi - \alpha - \beta = \gamma$. Iz tetivnosti zato sledi še $\sphericalangle RQP = \sphericalangle RAP = \gamma$. Podobno je $\sphericalangle RTB = \sphericalangle CTE = \sphericalangle CDE = \beta$ in $\sphericalangle BRT = \alpha$, zato velja $\sphericalangle TBR = \gamma$ in $\sphericalangle QPR = \sphericalangle QPR = \gamma$. Kota $\sphericalangle QPR$ in $\sphericalangle RQP$ sta tako oba enaka γ, kar pomeni, da je trikotnik PQR enakokrak z vrhom pri R.

Izračun $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$ .... **1 točka.**
Izpeljava enakosti $\frac{|AE|}{|AT|} = \frac{|AD|}{|AC|}$ .... **1 točka.**
Utemeljitev enakosti $\sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD$ .... **1 točka.**
Utemeljitev tetivnosti štirikotnika $CETD$ .... **1 točka.**
Utemeljitev enakosti $\sphericalangle ATR = \alpha$ **ali** $\sphericalangle RTB = \beta$ .... **1 točka.**
Utemeljitev enakosti $\sphericalangle RAT = \gamma$ **ali** $\sphericalangle TBR = \gamma$ .... **1 točka.**
Sklep $\sphericalangle RQP = \sphericalangle QPR = \gamma$ .... **1 točka.**

2. način. Kot v prvi rešitvi ugotovimo, da je $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$, $\frac{|AE|}{|AT|} = \frac{|AD|}{|AC|}$ in $\sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD$. Zdaj lahko izračunamo

$$\sphericalangle BTP = \sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = \sphericalangle TPB,$$

kjer smo v zadnji enakosti upoštevali enakost obodnih kotov nad lokom AB. Sledi, da je trikotnik BPT enakokrak in zato $|TB| = |PB|$.

V trikotnikih ATC in RTP je $\sphericalangle CTA = \sphericalangle RTP$ in $\sphericalangle ACT = \sphericalangle TPR$, torej sta si trikotnika podobna. Zato je $|RP| = \frac{|AC|\cdot|RT|}{|AT|} = |RT|\sqrt{3}$. Prav tako sta si trikotnika BTC in RTQ podobna, zato velja $|RQ| = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BT|} = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BP|}$, kjer smo upoštevali enakost $|BT| = |BP|$. Upoštevamo še podobnost trikotnikov ADC in BDP in dobimo $|BP| = \frac{|AC|\cdot|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$. Sledi $|RQ| = |RT|\sqrt{3} = |RP|$.

Izračun $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$ . . . . 1 točka.
Izpeljava enakosti $\frac{|AE|}{|AT|} = \frac{|AD|}{|AC|}$ . . . . 1 točka.
Utemeljitev enakosti $\sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD$ . . . . 1 točka.
Utemeljitev enakokrakosti trikotnika TPB . . . . 1 točka.
Izračun $|BT| = |BP| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$ . . . . 1 točka.
Uporaba podobnosti trikotnikov ATC in RTP ali trikotnikov BTC in RTQ . . . 1 točka.
Sklep $|RQ| = |RP|$ . . . . 1 točka.

3. način. Kot v drugem načinu ugotovimo, da je $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$ in s pomočjo podobnosti trikotnikov ATC in RTP izračunamo $|RP| = |RT|\sqrt{3}$, s pomočjo podobnosti trikotnikov BTC in RTQ pa $|RQ| = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BT|}$.

S pomočjo dveh kosinusnih izrekov bomo pokazali, da je $|BT| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$. To lahko naredimo na več načinov, eden od njih je naslednji: Po kosinusnem izreku v trikotniku ACD je

$$|BC| = 2|CD| = \sqrt{|AD|^2 + |AC|^2 - 2|AC| \cdot |AD| \cos \sphericalangle DAC} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \cos \sphericalangle DAC}|AC|.$$

Po kosinusnem izreku v trikotniku ATE in upoštevanju $|AT| = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$ pa je

$$|BT| = 2|ET| = 2\sqrt{|AT|^2 + |AE|^2 - 2|AT| \cdot |AE| \cos \sphericalangle DAC} = \sqrt{\frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cos \sphericalangle DAC}|AC|.$$

Sledi $|BT| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$ in iz enakosti $|RP| = |RT|\sqrt{3}$ in $|RQ| = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BT|}$ sledi $|RP| = |RQ|$.
Izračun $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$ . . . . 1 točka.
Uporaba podobnosti trikotnikov ATC in RTP ali trikotnikov BTC in RTQ . . . 1 točka.
Uporaba kosinusnega izreka za izrazitev ene od dolžin $|BC|, |BT|$ s pomočjo enega kota in dolžine ene daljice . . . . 2 točki.
Uporaba kosinusnega izreka za izrazitev druge od dolžin $|BC|, |BT|$ s pomočjo enega kota in dolžine ene daljice . . . . 1 točka.
Izpeljava $|BT| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$ . . . . 1 točka.
Sklep $|RQ| = |RP|$ . . . . 1 točka.

IV/B3.

Pokazali bomo, da če sta obe števili m in n sodi, ima zmagovito strategijo Miha, če pa je vsaj eno od števil m in n liho, ima zmagovito strategijo Jure.

Denimo najprej, da sta m in n sodi. Tedaj lahko Miha vsakič ponovi Juretovo potezo, saj bo tako po vsaki njegovi potezi število kroglic v vsaki posodi sodo. Zadnjo kroglico bo v tem primeru odstranil Miha in tako zmagal igro.

Denimo sedaj, da je vsaj eno od števil m in n liho. Tedaj lahko Jure v svoji prvi potezi poskrbi, da bo po njegovi potezi v obeh posodah sodo mnogo kroglic. Če je m liho in n sodo, potem Jure odstrani kroglico iz bele posode. Če je m sodo in n liho, Jure odstrani kroglico iz črne posode. Če pa sta m in n obe lihi, potem Jure prestavi kroglico iz bele v črno posodo. V vseh naslednjih potezah lahko nato Jure ponavlja Mihove poteze. S to strategijo bo Jure odstranil zadnjo kroglico in zmagal.

Zapis pogoja Miha zmaga $\Leftrightarrow$ števili m in n sodi . . . . 2 točki
Ugotovitev, da je Mihova taktika v primeru, ko sta števili m in n sodi, ponoviti Juretovo zadnjo potezo, in da to pripelje do Mihove zmage . . . . 2 točki
Ugotovljena prva Juretova poteza (odstraniti kroglico iz bele posode), ko je m liho

število in n sodo, ter prevedba na primer, ko sta obe števili sodi . . . . 1 točka
Ugotovljena prva Juretova poteza (odstraniti kroglico iz črne posode), ko je m sodo število in n liho, ter prevedba na primer, ko sta obe števili sodi . . . . 1 točka
Ugotovljena prva Juretova poteza (premakniti kroglico iz bele v črno posodo), ko sta m in n lihi števili, ter prevedba na primer, ko sta obe števili sodi . . . . 1 točka
Nepopoln zapis pogoja pri prvi točki (a brez napak) je vreden eno točko. Obravnava vsaj enega od primerov, ko je eno od števil m in n enako nič, je vredna eno točko.