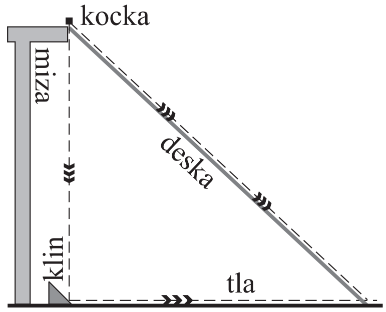
Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Skupina I

1. Blažka in Jernej si izmislita naslednje tekmovanje. Jernej majhno kocko spusti po deski, ki jo nasloni ob rob kuhinjske mize, da naredi klanec od roba mize do tal. Blažka z roba kuhinjske mize tik ob deski spusti enako kocko, da pade na klin z naklonom 45°, ki je pritrjen na tla navpično pod robom mize. Kocka se od klina prožno odbije v vodoravni smeri, tako da se giblje po tleh kuhinje. Blažka in Jernej tekmujeta, katera kocka bo prej na tleh pri krajišču deske, če oba vsak svojo kocko spustita z roba mize hkrati, da Jernejeva drsi po deski in Blažkina pade na klin pod robom mize in se nato giblje po tleh, kot kaže slika.



Višina mize je 75 cm, kocki se tako po tleh kot po deski gibljeta brez trenja. Spodnje krajišče deske je v vodoravni smeri od roba mize (merjeno po tleh) oddaljeno 80 cm.

a) S kolikšno hitrostjo se od klina v vodoravni smeri odbije Blažkina kocka?
b) Koliko časa potrebuje Jernejeva kocka in koliko Blažkina kocka do spodnjega krajišča deske?
c) Kolikšna bi morala biti vodoravna razdalja spodnjega krajišča deske od roba mize, da bi zmagal drugi tekmovalec kot v vprašanju b)?

2. Na prve sani, ki imajo skupaj z otrokom, ki sedi na njih, maso 10 kg, so z neraztegljivo vrvjo privezane druge sani, ki imajo skupaj z otrokom, ki sedi na njih, maso 15 kg. Koeficient lepenja oziroma trenja med sanmi in podlago je 0,1.

a) S kolikšno silo moramo vleči prve sani v vodoravni smeri, da se oboje sani gibljejo enakomerno?

Neraztegljivo vrv zamenjamo s prožno vrvjo, ki ima enake lastnosti kot vzmet s prožnostnim koeficientom 40 N/m. Na začetku, ko oboje sani mirujejo, je vrv vodoravna in iztegnjena, a nenapeta. V nekem trenutku začnemo vleči prve sani s stalno silo 30 N v vodoravni smeri proč od drugih sani.

b) S kolikšnim pospeškom se pričnejo gibati prve sani?
c) Pri kolikšnem raztezku vrvi se pričnejo gibati druge sani?
d) Po dovolj dolgem času se razdalja med sanmi ne spreminja več. Kolikšen je takrat pospešek sani?

3. Jan sedi na mirujočem vozičku, ki se lahko brez trenja giblje po vodoravnih tirih pravokotno glede na bližnjo steno. Skupna masa Jana in vozička je 45 kg. V nekem trenutku Jan vrže žogo z maso 0,60 kg proti steni v vodoravni smeri vzporedno s tiri. Hitrost žoge takoj po tem, ko žogo spusti iz rok, je 15 m/s glede na voziček.

a) S kolikšno hitrostjo glede na steno se giblje voziček z Janom takoj po tem, ko je vrgel žogo?
b) Žoga se prožno odbije od stene in Jan jo ulovi. Kolikšna je hitrost vozička z Janom glede na steno po tem, ko ulovi žogo?

Skupina II

1. Na voljo imaš žarnico in dva upornika, vsi trije imajo upor po 8 Ω, ter vir z gonilno napetostjo 12 V in brez notranjega upora. Žarnica pregori pri napetosti večji od 10 V in ne sveti pri napetosti manjši od 7 V.

   a) Nariši sheme vseh možnih vezav naštetih elementov, da žarnica sveti.

   b) Najmanj koliko enakih upornikov z uporom 8 Ω moraš imeti v vezju poleg vira in žarnice, da bo žarnica najmočneje svetila? Nariši shemo ustrezne vezave.

2. Znotraj ploščatega kondenzatorja s ploščino posamezne plošče po 500 cm^2, ki sta v razmiku 1 cm, je plin, ki ga ionizira sevanje iz okolice. Vsako sekundo nastane $3 \cdot 10^9$ parov pozitivnih in negativnih ionov z velikostjo osnovnega naboja.

   a) Kondenzator nabijemo na napetost 50 V in ga odklopimo od vira. Za koliko se takoj po odklopu vsako sekundo spremeni napetost na kondenzatorju? Se napetost povečuje ali zmanjšuje?

   b) Pri drugem poskusu kondenzator in upornik z uporom $1 \cdot 10^{10}$ Ω zaporedno vežemo na vir z gonilno napetostjo 50 V in brez notranjega upora. Kolikšen tok teče skozi upornik in kolikšna je v tem primeru napetost na kondenzatorju?

3. Blažka in Jernej se odločita pomeriti v tem, kdo hitreje ohladi skodelico čaja na za pitje prijetno temperaturo 41 °C. Tekmovanje izpeljeta na naslednji način.

   Blažka v skodelico z maso 250 g natoči 250 g čaja in skodelico pokrije z lahkim plastičnim pokrovom, ki v primerjavi s stenami skodelice zanemarljivo prevaja toploto in hkrati preprečuje ohlajanje čaja z izhlapevanjem. Počaka kratek čas, da se skodelica ogreje zaradi vročega čaja v njej. Nato skodelico postavi ven v taleči se sneg.

   Jernej svoj čaj hladi tako, da ga prelije iz tople skodelice v enako skodelico, ki je prej na sobni temperaturi 20 °C. Skodelico pokrije z enakim lahkim plastičnim pokrovom kot Blažka in počaka, da se skodelica ogreje zaradi čaja v njej. Postopek ponavlja, tako da čaj vsakič prelije v enako skodelico, ki je prej na sobni temperaturi.

   Jernej in Blažka na začetku postopata enako, tako da imata oba hkrati v skodelici čaj s temperaturo 80 °C. Tekma se začne tako, da Jernej v trenutku, ko Blažka svojo skodelico postavi v sneg, prvič prelije čaj. Hitrost ohlajanja čaja v Blažkini skodelici je sorazmerna s temperaturno razliko med čajem in snegom. Po 20 s je temperatura čaja v Blažkini skodelici 70 °C.

   Specifična toplota čaja je 4,2 kJ/kg K, specifična toplota porcelana je 1,0 kJ/kg K.

   a) Kolikšna je temperatura čaja v Blažkini skodelici po 60 sekundah ohlajanja?

   b) Po kolikšnem času se bo čaj v Blažkini skodelici ohladil na za pitje prijetno temperaturo?

   c) Kolikšna je temperatura Jernejevega čaja, tik preden drugič prelije čaj?

   d) Kolikokrat mora Jernej ponoviti postopek prelivanja čaja, da čaj ohladi na za pitje prijetno temperaturo?

   e) Največ koliko časa sme trajati vsakokratno ohlajanje čaja in segrevanje skodelice v vprašanju d), da bo Jernej čaj ohladil pred Blažko?

Skupina III

1. Velika posoda se navzgor nadaljuje v gladko navpično cev s premerom 5,0 cm. Cev tesno zapira bat, ki je brez trenja gibljiv v navpični smeri vzdolž cevi. Začetna skupna prostornina plina v posodi in cevi je 1,0 m^3, tlak je 100 kPa in temperatura 20 °C. Dogajanja v nalogi so dovolj počasna, da lahko predpostaviš, da so vse spremembe izotermne.

   a) Za koliko se bat spusti, ko nanj položimo utež z maso 10 g?

   b) Ko utež odstranimo, bat zaniha z nihajnim časom 10 s. Kolikšna je masa bata?

2. Na prve sani, ki imajo skupaj z otrokom, ki sedi na njih, maso 10 kg, so s prožno vrvjo privezane druge sani, ki imajo skupaj z otrokom, ki sedi na njih, maso 15 kg. Koeficient lepenja oziroma trenja med sanmi in podlago je 0,1. Prožna vrv ima enake lastnosti kot vzmet s prožnostnim koeficientom 40 N/m. Na začetku, ko oboje sani mirujejo, je vrv vodoravna in iztegnjena, a nenapeta.

   a) S kolikšno silo vlečemo prve sani, ko se oboje sani gibljejo enakomerno?

   Sani naj mirujejo, vrv je vodoravna in iztegnjena, a nenapeta. Prve sani pričnemo vleči v vodoravni smeri stran od drugih sani s silo iz vprašanja a).

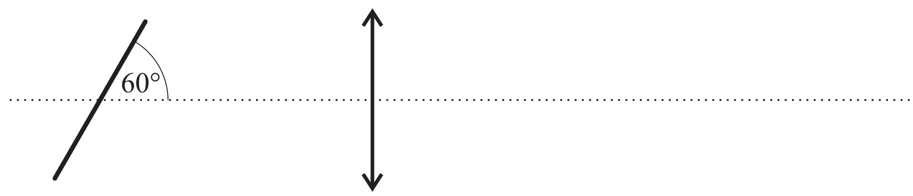
   b) Pri kolikšnem raztezku vrvi se pričnejo gibati druge sani?

   c) Kolikšna je v trenutku, ko se pričnejo gibati druge sani, hitrost prvih sani?
   Namig: Pomagaj si z energijami.

   d) Po dovolj dolgem času se razdalja med sanmi ne spreminja več. Kolikšna je takrat hitrost sani?

   e) Kolikšna bi bila hitrost iz vprašanja d), če bi bila vrv popolnoma neraztegljiva?
   Namig: Če je vrv neraztegljiva, to pomeni, da je prožnostni koeficient vrvi neskončno velik.

3. Pred tanko zbiralno lečo z goriščno razdaljo 20,0 cm je tanka ravna palica z dolžino 12,0 cm. Palica leži v ravnini, ki vsebuje optično os leče, kot kaže slika. Sredina palice je na optični osi in je od leče oddaljena 30,0 cm. Palica je nagnjena proti leči, kot med palico in optično osjo je 60,0°.



   a) V kolikšni oddaljenosti od leče bi nastala slika palice, če bi bila palica postavljena pravokotno na optično os?
   Kolikšna bi bila dolžina slike palice?

   b) V kolikšni oddaljenosti od leče in kako daleč od optične osi pa nastaneta sliki obeh krajišč nagnjene palice?

   c) Izkaže se, da je slika nagnjene palice ravna (vse točke slike so na isti premici).
   Izračunaj dolžino slike nagnjene palice in kot med sliko nagnjene palice in optično osjo.

   d) Pokaži, da so vse točke slike nagnjene palice na isti premici oziroma da je slika nagnjene palice ravna.

1. $h = 75$ cm, $d = 80$ cm, $g = 9{,}8$ m/s^2.

a) Vodoravna hitrost kocke je zaradi prožnega odboja in kota 45° enaka hitrosti prostega pada z višine h:

$$v = \sqrt{2gh} = 3{,}834\,\mathrm{m/s}.$$

[2 t.]

b) Blažkina kocka z višine h prosto pada do tal čas t_1:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}391\,\mathrm{s}.$$

Po vodoravnih tleh do vznožja klanca potuje enakomerno še čas t_2:

$$t_2 = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{2gh}} = 0{,}209\,\mathrm{s}.$$

V celoti Blažkina kocka potuje čas

$$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{d}{\sqrt{2gh}} = \frac{2h+d}{\sqrt{2gh}} = \frac{2h+d}{v} = 0{,}600\,\mathrm{s}$$

Jernejeva kocka se po klancu zaradi dinamične komponente teže giblje enakomerno pospešeno s konstantnim pospeškom a:

$$a = g\sin(\varphi) = g\frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} = 6{,}703\,\mathrm{m/s}^2,$$

kjer je φ naklon deske proti vodoravnici. Čas potovanja t_3 po deski z dolžino $\sqrt{h^2+d^2}$ izračunamo iz enačbe za enakomerno pospešeno gibanje

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\sqrt{h^2+d^2}}{a}} = \sqrt{\frac{2(h^2+d^2)}{gh}} = \frac{2\sqrt{h^2+d^2}}{v} = 0{,}572\,\mathrm{s}.$$

Tekmo zmaga Jernej.

[5 t.]

c) Rezultat bo obrnjen, ko bo veljalo $t_1 + t_2 < t_3$, kar nam da enačbo

$$2h + d < 2\sqrt{h^2+d^2}.$$

Po kvadriranju dobimo

$$4h^2 + 4hd + d^2 < 4h^2 + 4d^2$$

in od tu $4h < 3d$ ter končno

$$d > \frac{4}{3}h = d_{\mathrm{mejni}} = 1\,\mathrm{m}.$$

Če je oddaljenost spodnjega krajišča deske od roba mize v vodoravni smeri večja od 1 m pride do spodnjega krajišča deske prva Blažkina kocka.

[3 t.]

2. $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 15$ kg, $k_t = 0{,}1$, $k = 40$ N/m, $F = 30$ N.

a) Pri enakomernem gibanju je vsota sil, ki delujejo na sani enaka 0, torej je vlečna sila nasprotno enaka sili trenja:

$$F_0 = k_t m_1 g + k_t m_2 g = 24{,}5\ \mathrm{N}\,. \qquad [2\ \mathrm{t.}]$$

b) Na začetku, ko elastična vrv še ni napeta, na prve sani delujeta v vodoravni smeri le vlečna sila in sila trenja. Iz drugega Newtonovega zakona sledi

$$a = \frac{F - k_t m_1 g}{m_1} = 2{,}0\ \mathrm{m/s}\,. \qquad [3\ \mathrm{t.}]$$

c) Druge sani se premaknejo, ko sila vrvi preseže silo lepenja. Če označimo raztezek v mejnem primeru s s, velja

$$ks = k_t m_2 g\,, \qquad s = \frac{k_t m_2 g}{k} = 37\ \mathrm{cm}\,. \qquad [3\ \mathrm{t.}]$$

d) Sedaj deluje trenje tudi na druge sani in vsota vseh sil na oboje sani je

$$F' = F - k_t m_1 g - k_t m_2 g = 5{,}5\ \mathrm{N}\,.$$

Oboje sani se gibljejo pospešeno s pospeškom

$$a' = \frac{F'}{m_1 + m_2} = 0{,}22\ \mathrm{m/s}\,. \qquad [2\ \mathrm{t.}]$$

3. $M = 45$ kg, $m = 0{,}6$ kg, $v_0 = 15$ m/s.

a) Pri metu se ohranja skupna gibalna količina. Pred metom je skupna gibalna količina 0, po metu pa se Jan in voziček gibljeta s hitrostjo v proč od stene, žoga pa proti steni. Hitrost žoge glede na okolico (steno) je $v_0 - v$. Velja

$$0 = Mv - m(v_0 - v)\,, \qquad v = \frac{mv_0}{M + m} = 0{,}20\ \mathrm{m/s}\,. \qquad [6\ \mathrm{t.}]$$

b) Žoga se od stene odbije z nasprotno enako hitrostjo. Če hitrost Jana, vozička in žoge po tem, ko Jan ujame žogo, označimo z v', ohranitev gibalne količine zapišemo:

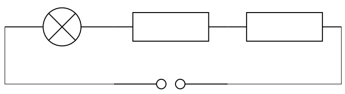
$$(M + m)v' = Mv + m(v_0 - v)\,.$$

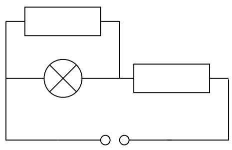
Sledi

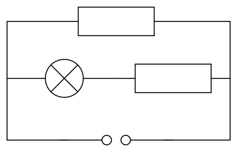
$$v' = \frac{(M - m)v}{M + m} + \frac{mv_0}{M + m} = \frac{2Mv}{M + m} = \frac{2Mmv_0}{(M + m)^2} = 0{,}39\ \mathrm{m/s}\,. \qquad [4\ \mathrm{t.}]$$

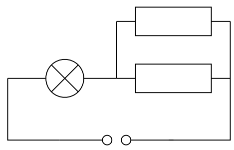
1. **a)** $R = 8\ \Omega$, $R_ž = 8\ \Omega$, $U_0 = 12$ V, $U_{\text{maks}} = 10$ V, $U_{\min} = 7$ V.

   Poleg vezja, pri katerem so žarnica in upornika vezani vzporedno in je napetost na žarnici kar enaka napetosti vira 12 V, so možne še štiri vezave, prikazane na slikah od (i) do (iv).

   
   (i)

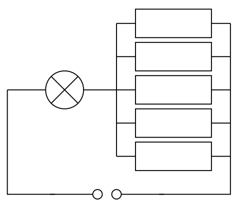
   
   (ii)

   
   (iii)

   
   (iv)

   V vezju (i) je napetost na žarnici tretjina U_0, torej 4 V, v vezju (ii) je nadomestni upor vzporedno vezane žarnice in upornika 4 Ω in zato napetost na žarnici prav tako tretjina U_0, 4 V, v vezju (iii) zgornji upornik ne vpliva na napetost na žarnici in je ta enaka polovici U_0, 6 V, v vezju (iv) pa je nadomestni upor upornikov 4 Ω in napetost na žarnici dve tretjini U_0, 8 V.
   [6 t.] – če so analizirana vsa možna vezja

   b) Da bo napetost na žarnici 10 V, mora biti žarnica zaporedno vezana z uporniki, ki so vezani tako, da je padec napetosti na upornikih 2 V, njihov nadomestni upor pa 1,6 Ω. Za ta namen porabimo najmanj upornikov, če jih pet vežemo vzporedno, tako kot kaže slika.
   [4 t.]

2. $S = 500\ \text{cm}^2$, $d = 1$ cm, $U_0 = 50$ V, $\Phi = 3\cdot 10^9\ \text{s}^{-1}$, $R = 10^{10}\ \Omega$, $\Delta t = 1$ s.

   a) Na kondenzatorju je na začetku naboj

   $$e = CU = \frac{\varepsilon_0 S U_0}{d} = 2{,}2\cdot 10^{-9}\ \text{As}\,. \qquad [1\ \text{t.}]$$

   (Pomeni, da je tolikšna količina naboja na pozitivni plošči in nasprotno enaka količina na negativni plošči.) Vsako sekundo nastane Δe pozitivnega naboja in $-\Delta e$ negativnega naboja:

   $$\Delta e = \Phi \Delta t\, e_0 = 4{,}8\cdot 10^{-10}\ \text{As}\,. \qquad [2\ \text{t.}]$$

   Pozitivno nabita plošča pritegne negativni naboj in naboj na pozitivni plošči se zmanjša za Δe; podobno se zgodi na negativni plošči. Napetost na ploščah se torej vsako sekundo *zmanjša* za

   $$\Delta U = \frac{\Delta e}{C} = 11\ \text{V}\,. \qquad [3\ \text{t.}]$$

   b) Da se v sklenjenem električnem krogu napetost na kondenzatorju ohranja, steče iz vira vsako sekundo toliko naboja, da kompenzira izgubo naboja na plošči; to ustreza toku

   $$I = \frac{\Delta e}{\Delta t} = 4{,}8\cdot 10^{-10}\ \text{A}\,. \qquad [2\ \text{t.}]$$

   Padec napetosti na uporniku je potem

   $$U_R = RI = 4{,}8\ \text{V}\,,$$

   na kondenzatorju pa

   $$U_C = U_0 - U_R = 45{,}2\ \text{V} \approx 45\ \text{V}\,. \qquad [2\ \text{t.}]$$

3. $c_1 = 4{,}2$ kJ/kg K, $c_2 = 1{,}0$ kJ/kg K, $T_0 = 80\,°\mathrm{C}$, $T_\mathrm{z} = 0\,°\mathrm{C}$, $T_\mathrm{s} = 20\,°\mathrm{C}$, $T_\mathrm{k} = 41\,°\mathrm{C}$, $t_0 = 20$ s, $T_{20} = 70\,°\mathrm{C}$, $m_1 = m_2 = m = 250$ g, $t_2 = 60$ s,

$$\eta = \frac{T_1 - T_\mathrm{z}}{T_0 - T_\mathrm{z}} = \frac{7}{8} = 0{,}875\,.$$

a) V času t_2 se čaj v Blažkini skodelici ohladi za $t_2/t_0 = 3$-krat tak faktor η kot v času t_0, torej velja

$$T_{60} = T(t_2) = T_\mathrm{z} + \eta^3\,(T_0 - T_\mathrm{z}) = 53{,}6\,°\mathrm{C}.$$

[2 t.]

b) Čas ohlajanja določimo numerično.
Lahko bi ga izračunali tudi analitično, a ker račun vključuje uporabo funkcije ln, predvidevamo, da ga bo uporabilo malo tekmovalcev.
Postopamo podobno kot v vprašanju a) in izračunamo nekaj zaporednih temperatur po večkratniku časa t_0

$$T_{80} = T_\mathrm{z} + \eta^4\,(T_0 - T_\mathrm{z}) = 46{,}9\,°\mathrm{C},$$

$$T_{100} = T_\mathrm{z} + \eta^5\,(T_0 - T_\mathrm{z}) = 41{,}03\,°\mathrm{C} \approx 41\,°\mathrm{C}.$$

Vidimo, da je po času $t_\mathrm{B} = 5t_0 = 100$ s temperatura čaja iskanih $T_\mathrm{k} = 41\,°\mathrm{C}$.

Analitično bi nalogo rešili na podoben način. Iščemo y iz enačbe

$$(T_0 - T_\mathrm{z})\,\eta^y = T_\mathrm{k} - T_\mathrm{z}$$

oziroma

$$\eta^y = \frac{T_\mathrm{k} - T_\mathrm{z}}{T_0 - T_\mathrm{z}},$$

od koder dobimo

$$y = \frac{\ln\left(\frac{T_\mathrm{k} - T_\mathrm{z}}{T_0 - T_\mathrm{z}}\right)}{\ln(\eta)} = 5{,}006$$

in končno iskani čas $t_\mathrm{B} = y t_0 = 100{,}1\,\mathrm{s} \approx 100$ s.

[2 t.]

c) Kalorimetrija nam da

$$m_1 c_1 (T_0 - T_1) = m_2 c_2 (T_1 - T_\mathrm{s})$$

oziroma

$$T_1 = \frac{m_1 c_1 T_0 + m_2 c_2 T_\mathrm{s}}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{c_1 T_0 + c_2 T_\mathrm{s}}{c_1 + c_2} = 68{,}46\,°\mathrm{C}.$$

Izraz lahko zapišemo tudi malo drugače, kar nam bo prišlo prav v nadaljevanju naloge

$$T_1 - T_\mathrm{s} = (T_0 - T_\mathrm{s})\frac{m_1 c_1}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = (T_0 - T_\mathrm{s})\frac{c_1}{c_1 + c_2}.$$

[2 t.]

d) Število prelivanj, potrebnih za primerno ohladitev čaja, ponovno izračunamo numerično v nekaj zaporednih korakih.
Uporabimo zadnjo relacijo pri vprašanju c), od koder za temperaturo T_i po i-tem prelivanju dobimo

$$T_i = T_\mathrm{s} + (T_0 - T_\mathrm{s})\left(\frac{c_1}{c_1 + c_2}\right)^i.$$

Kolikokrat mora Jernej preliti čaj, numerično ugotovimo z izračunom temperature čaja po i zaporednih prelivanjih.

i	0	1	2	3	4	5	6
T_i [°C]	80,00	68,46	59,14	51,61	45,53	40,62	36,66

Po petih prelivanjih ima čaj temperaturo 40,62 °C, ki je nižja od T_k, torej zadošča, da Jernej čaj prelije petkrat.

Analitično bi postopali podobno kot pri vprašanju b). Iščemo potenco i, da velja

$$T_\mathrm{k} - T_\mathrm{s} = (T_0 - T_\mathrm{s}) \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} \right)^i .$$

Od tu dobimo

$$i = \frac{\ln\left(\frac{T_\mathrm{k}-T_\mathrm{s}}{T_0-T_\mathrm{s}}\right)}{\ln\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\right)} = 4{,}92.$$

Ker mora biti i celo število, in ker sme imeti čaj temperaturo največ T_k mora Jernej čaj preliti petkrat, saj je 5 prvo celo število, večje od 4,92.

[3 t.]

e) Ker mora 5 prelivanj trajati manj kot $t_\mathrm{B} = 100$ s, mora posamezno prelivanje in ohlajanje čaja trajati $t_\mathrm{p} = t_\mathrm{B}/5 \leq 20$ s.

[1 t.]

1. $V_0 = 1\ \mathrm{m}^3$, $2r = 5$ cm, $p_0 = 100$ kPa, $m_u = 10$ g, $t_0 = 10$ s.

a) Ko položimo utež na bat, se tlak v posodi poveča na $p = p + F/S$, $S = \pi r^2$, $F = m_u g$, prostornina pa zmanjša na $V = V_0 - Sx$, če je x premik bata. Sprememba je izotermna in velja

$$pV = \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)(V_0 - Sx) = p_0 V_0\,, \qquad \text{ali} \qquad \frac{F}{S}\,V_0 - p_0 Sx - Fx = 0\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

Ker je teža uteži zelo majhna, lahko tretji člen zanemarimo. Sledi:

$$x = \frac{FV_0}{p_0 S^2} = \frac{m_u g V_0}{p_0\,\pi^2\,r^4} = 25\ \mathrm{cm}\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

b) Zrak v posodi deluje kot vzmet s prožnostnim koeficientom

$$k = \frac{F}{x} = \frac{p_0 S^2}{V_0} = \frac{p_0\,\pi^2\,r^4}{V_0} = 0{,}39\ \mathrm{N/m}\,. \qquad [3\text{ t.}]$$

Nihajni čas uteži z maso m_b na vzmeti je

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_b}{k}}\,.$$

Od tod sledi

$$m_b = \frac{t_0^2\,k}{4\pi^2} = 0,98\ \mathrm{kg} \approx 1{,}0\ \mathrm{kg}\,. \qquad [3\text{ t.}]$$

2. $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 15$ kg, $k_t = 0{,}1$, $k = 40$ N/m.

a) Pri enakomernem gibanju je vsota sil, ki delujejo na sani enaka nič, torej je vlečna sila nasprotno enaka sili trenja:

$$F_0 = k_t m_1 g + k_t m_2 g = 24{,}5\ \mathrm{N}\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

b) Druge sani se premaknejo, ko sila vrvi preseže silo lepenja. Če označimo raztezek v mejnem primeru s s, velja

$$ks = k_t m_2 g\,, \qquad s = \frac{k_t m_2 g}{k} = 37\ \mathrm{cm}\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

c) Delo, ki ga opravi vlečna sila F_0 na poti s, se porabi za povečanje prožnostne energije vrvi, kinetične energije prvih sani in za izgube zaradi trenja:

$$F_0 s = \tfrac{1}{2}ks^2 + \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + k_t m_1 g s\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

Iz enačbe pri a) lahko zapišemo $F_0 s - k_t m_1 g s = k_t m_2 g s$, iz enačbe pri b) pa $\frac{1}{2}\,ks^2 = \frac{1}{2}\,k_t m_2 g s$. Sledi

$$\tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2}\,k_t m_2 g s = \frac{k_t^2 m_2^2 g^2}{2k}\,, \qquad v_1 = \frac{k_t m_2 g}{\sqrt{m_1 k}}\,.$$

Od tod (ali direktno iz prve enačbe v tem podvprašanju) izračunamo

$$v_1 = 0{,}735\ \mathrm{m/s} \approx 0{,}73\ \mathrm{m/s} \ \ (\text{ali } 0{,}74\ \mathrm{m/s})\,. \qquad [1\text{ t.}]$$

d) V trenutku, ko se pričnejo gibati druge sani, je vsota zunanjih sil na sistem sani enaka nič; zato se ohranja skupna gibalna količina. (Pred tem je sila lepenja na druge sani manjša od mejne in ravnovesje sil pri a) ni izpolnjeno.) Če končno hitrost obeh sani označimo z v^*, velja

$$(m_1 + m_2)v^* = m_1 v_1\,, \qquad v^* = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0{,}29\ \mathrm{m/s} \ \ (\text{ali } 0{,}30\ \mathrm{m/s})^1\,. \qquad [2\text{ t.}]$$

e) Če je vrv med sanmi toga, je vlečna sila uravnovešena z največjo silo lepenja, ki deluje na *oboje* sani, zato se sistem ne premakne. To vidimo tudi iz enačbe, ki povezuje v_1 s koefientom k; pri togi vrvi gre k preko vseh meja, v_1 in posledično v^* pa proti nič.
[1 t.]

[1] To vrednost v^* dobimo, če uporabimo vrednost $v_1 = 0{,}74$ m/s. Oboje štejemo kot pravilno.

3. $f = 20$ cm, $a = 30$ cm, $\varphi = 60°$, $l = 12$ cm.

a) Pravokotno na optično os postavljena palica se preslika za lečo na razdaljo b od leče

$$b = \frac{af}{a-f} = 60{,}0\,\text{cm}.$$

Povečava preslikave nam da za dolžino l' slike palice

$$l' = \frac{b}{a}l = \frac{f}{a-f}l = 24\,\text{cm}.$$

[2 t.]

b) Zgornje krajišče palice je za $h = \frac{1}{2}l\sin\varphi = l\frac{\sqrt{3}}{4} = 5{,}20$ cm nad optično osjo in za $x = \frac{1}{2}l\cos\varphi = l/4 = 3{,}00$ cm bliže leči kot sredina palice. Analogno je spodnje krajišče za $h = l\frac{\sqrt{3}}{4} = 5{,}20$ cm pod optično osjo in za $x = l/4 = 3{,}00$ cm dlje od leče kot sredina palice. Označimo zgornje krajišče palice kot točko P_1 in spodnje krajišče palice kot točko P_2. Ustrezni sliki sta v točkah S_1 in S_2 s koordinatama $S_1 = (b_1, y_1)$ in $S_2 = (b_2, y_2)$. Koordinatni sistem smo postavili v središče leče, os x kaže vzdolž optične osi na desno, os y pa navzgor (glede na skico v nalogi). Oddaljenost P_1 od leče je $a_1 = a - x = 27{,}0$ cm, oddaljenost P_2 od leče je $a_2 = a + x = 33{,}0$ cm. Od tu izračunamo, kam se preslikata obe krajišči palice.

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = \frac{\left(a - \frac{l}{2}\cos\varphi\right)f}{\left(a - \frac{l}{2}\cos\varphi\right) - f} = 77{,}14\,\text{cm}.$$

Podobni trikotniki oziroma pravilo o povečavi pri preslikavi skozi lečo vodijo do tega, kako daleč (y) od optične osi se preslika krajišče palice

$$y_1 = -\frac{b_1}{a_1}h = -\frac{f}{\left(a - \frac{l}{2}\cos\varphi\right) - f}h = -14{,}85,\text{cm}.$$

Analogno za P_2 dobimo

$$b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = \frac{\left(a + \frac{l}{2}\cos\varphi\right)f}{\left(a + \frac{l}{2}\cos\varphi\right) - f} = 50{,}77\,\text{cm}.$$

in

$$y_2 = \frac{b_2}{a_2}h = \frac{f}{\left(a + \frac{l}{2}\cos\varphi\right) - f}h = 7{,}99\,\text{cm}.$$

[3 t.]

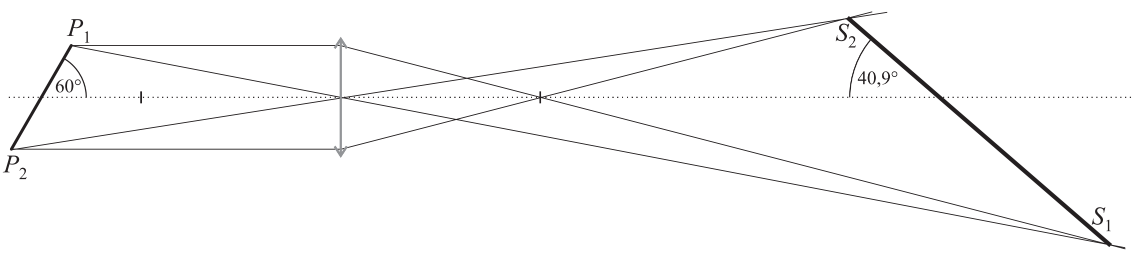
c) Dolžino slike palice in kot ϑ med sliko palice in optično osjo izračunamo iz podatkov za vektor $\vec{s}$

$$\vec{s} = \overrightarrow{S_2S_1} = (b_1 - b_2, y_1 - y_2) = (26{,}37\,\text{cm}, -22{,}84\,\text{cm}).$$

Dolžina vektorja $\vec{s}$ je $s = \sqrt{(b_1-b_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = 34{,}89\,\text{cm} \approx 34{,}9\,\text{cm} \approx 35\,\text{cm}$.
Kot ϑ je

$$\tan\vartheta = -\frac{y_1 - y_2}{b_1 - b_2} = \frac{22{,}84}{26{,}37} = 0{,}866 \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta = 40{,}9° \approx 41°\,.$$

[3 t.]



d) Kako pokazati, da so vse točke slike nagnjene palice na premici, se da na več načinov.

En način je, da pokažemo, da pade slika sredine palice s koordinatami $S_0 = (b, 0)$ ravno na daljico S_2S_1 in sicer neodvisno od dolžine nagnjene palice l.

Druga možnost je, da izračunamo naklon vektorja $\vec{S_2S_1}$ proti optični osi in ugotovimo, da ni odvisen od dolžine nagnjene palice l.

To, da ne eno ne drugo ni odvisno od dolžine l, pomeni, da velja za vse pare točk na nagnjeni palici, torej za celotno palico oziroma za vse točke, ki so slike točk na nagnjeni palici.

Poglejmo prvi način podrobneje. Skozi točki $S_1 = (b_1, y_1)$ in $S_2 = (b_2, y_2)$ poiščemo premico $y = kx + n$, tako da določimo k in n. Nato poiščemo presečišče te premice z optično osjo, kar pomeni točko $T_0 = (x_0, 0)$. Za x_0 z uporabo znanih relacij

$$k = \frac{y_2 - y_1}{b_2 - b_1} \qquad \text{in} \qquad n = y_1 - kb_1 = \frac{b_1y_2 - b_2y_1}{b_1 - b_2}$$

po krajšem računu dobimo

$$x_0 = -\frac{n}{k} = \frac{b_1y_2 - b_2y_1}{y_2 - y_1}.$$

Ko v izraz za x_0 vstavimo pri vprašanju b) dobljene izraze za b_1, b_2, y_1 in y_2, po daljšem računu dobimo

$$x_0 = \frac{af}{a - f} = b. \qquad \text{konec dokaza}$$

Podobno gre izračun naklona slike palice k, v katerega vstavimo izraze za b_1, b_2, y_1 in y_2, in po daljšem računu dobimo

$$k = -\tan\vartheta = -\tan\varphi\,\frac{a - f}{f}. \qquad \text{konec dokaza}$$

Od tu mimogrede ugotovimo še, da je nagib slike ϑ povezan z nagibom palice φ z relativno preprosto relacijo

$$\tan\vartheta = \tan\varphi\,\frac{a - f}{f} = \frac{1}{2}\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

kar nam da že znani rezultat $\vartheta = 40{,}9°$.

[2 t.]